

**FREIE HOMOTOPIEKLASSEN UND DAS
EIGENWERTSPEKTRUM DES LAPLACE-OPERATORS
BEI HYPERBOLISCHEN RAUMFORMEN**

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der

Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

HANS RIGGENBACH

aus Rünenberg

1973

aku-Fotodruck

Basel

1975

**FREIE HOMOTOPIEKLASSEN UND DAS
EIGENWERTSPEKTRUM DES LAPLACE-OPERATORS
BEI HYPERBOLISCHEN RAUMFORMEN**

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der

**Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel**

von

HANS RIGGENBACH

aus Rünenberg

aku-Fotodruck

Basel

1975

Genehmigt von der Philosophisch - Naturwissenschaftlichen
Fakultät auf Antrag der Herren Professoren H. Huber und
W. Habicht

Basel, den 8. Mai 1973

Professor M. Eichler

Dekan



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Vorbemerkungen	2
§1 Ergebnisse	3
§2 Der Laplace - Operator	8
§3 Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung	12
§4 Hilfssätze über den n -dimensionalen hyperbolischen Raum	21
§5 Die Funktion $G(p,q,s)$	28
§6 Die Fourierkoeffizienten von $G(.,q,s)$	33
§7 Die Funktion $I(s)$ und das Eigenwertspektrum	37
§8 Die Funktion $I(s)$ und das geometrische Spektrum	42
§9 Herleitung der Ergebnisse	50
Literaturverzeichnis	56

Einleitung

Eine wichtige Invariante der Geometrie kompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist das Eigenwertspektrum des zugehörigen Laplace Operators. Zwar brauchen zwei Mannigfaltigkeiten mit gleichem Eigenwertspektrum nicht isometrisch-diffeomorph zu sein, aber durch das Eigenwertspektrum sind beispielsweise Volumen und Dimension sowie einige aus Krümmungsgrößen abgeleitete Invarianten eindeutig bestimmt. Man vergleiche hierzu [1], Kapitel III, B und E.

In der vorliegenden Arbeit wird das Eigenwertspektrum einer speziellen Klasse von Mannigfaltigkeiten untersucht. Es sind dies die hyperbolischen Raumformen, d.h. kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter negativer Krümmung. Es zeigt sich, dass das Eigenwertspektrum einer hyperbolischen Raumform M nur von einem System von Invarianten abhängt, welches aus den freien Homotopieklassen von M gewonnen werden kann. Zudem werden wir die asymptotische Verteilung der Längen von freien Homotopieklassen bei hyperbolischen Raumformen bestimmen.

Für zweidimensionale, orientierbare hyperbolische Raumformen wurde dieser Problemkreis von H. Huber in [6] behandelt. Die dort entwickelte Methode wird in dieser Arbeit auf hyperbolische Raumformen beliebiger Dimension übertragen. Dies geschieht in §5 bis §9, vorausgeschickt wird eine Zusammenstellung der dafür erforderlichen Grundlagen (§2 bis §4).

Vorbemerkungen

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet: Unter einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $M = (M, g)$ wird stets eine differenzierbare C^∞ -Mannigfaltigkeit M mit vorgegebenem Masstensor g verstanden. $C^0(M)$ bezeichne die Menge der stetigen und $C^k(M)$, $k \in \{1, 2, \dots; \infty\}$, die Menge der k -mal stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen. Für $p \in M$ sei M_p der Tangentialraum von M in p , auf welchem durch g ein Skalarprodukt $g(A, B)$ mit zugehöriger Norm $\|A\| = \sqrt{g(A, A)}$ induziert wird ($A, B \in M_p$). Ist $f: M \rightarrow M'$ eine differenzierbare Abbildung, so sei f_* die durch f induzierte Abbildung des Tangentialbündels von M in das Tangentialbündel von M' . Die Differentialabbildung $(f_*)_p: M_p \rightarrow M'_{f(p)}$ ist die Restriktion von f_* auf M_p . f heiße längentreu, wenn $(f_*)_p$ für jedes $p \in M$ isometrisch ist.

Unter einer Geodätischen auf M verstehen wir eine differenzierbare Kurve $\gamma: J \rightarrow M$ (J ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$), deren Tangentialfeld $\dot{\gamma}$ bezüglich des Levi-Civita Zusammenhangs von M längs γ parallel ist.

§1. Ergebnisse

1.1. Es bezeichne im folgenden stets M eine hyperbolische Raumform der Dimension $n \geq 2$. Darunter ist also eine kompakte, n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit überall konstanter, negativer Schnittkrümmung zu verstehen.

1.2. Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$\Delta^M \varphi = \lambda \varphi, \varphi \in C^\infty(M), \lambda \in \mathbb{C}$$

für den zu M gehörigen Laplace-Operator Δ^M . λ heiße Eigenwert von Δ^M , wenn der zugehörige Eigenraum $E_\lambda(M) := \{\varphi \in C^\infty(M) / \Delta^M \varphi = \lambda \varphi\}$ eine nicht identisch verschwindende Eigenfunktion enthält. Mit diesem Eigenwertproblem werden wir uns in §2 eingehender beschäftigen. Wir erwähnen zunächst nur die folgenden, allgemein bekannten Resultate: Die Eigenwerte bilden eine diskrete Folge von nicht negativen, reellen Zahlen. Jeder Eigenraum $E_\lambda(M)$ ist ein Vektorraum endlicher Dimension über dem Körper der komplexen Zahlen.

λ ist also genau dann Eigenwert von Δ^M , wenn die Dimension $d_M(\lambda)$ von $E_\lambda(M)$ von Null verschieden ist. Für nicht reelle oder negative λ ist $d_M(\lambda) = 0$. Zudem ist stets $d_M(0) = 1$, denn $E_0(M)$ ist der Raum der auf M harmonischen und somit (weil M kompakt ist) konstanten Funktionen. Durch die Werte von $d_M(\lambda)$ für positive λ werden damit die Eigenwerte von Δ^M samt ihrer Vielfachheit eindeutig beschrieben.

Definition 1. Die für alle reellen $\lambda > 0$ definierte Funktion $d_M(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} E_\lambda(M)$ heiße das Eigenwertspektrum von M .

1.3. Zwei geschlossene Wege $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow M$ heißen frei homotop, wenn es eine stetige Deformationsabbildung $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ derart gibt, dass $F(0, t) = \gamma_0(t)$, $F(1, t) = \gamma_1(t)$ und $F(s, 0) = F(s, 1)$ für alle s, t aus $[0, 1]$. Die Relation der freien Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geschlossenen Wege auf M . Offenbar gehören alle zu einem Punkt ausgearteten Wege zur selben freien Homotopieklasse, der trivialen freien Homotopieklasse O von M . Die Menge der freien Homotopieklassen einer Mannigfaltigkeit hat im allgemeinen nicht die Struktur einer Gruppe. Hingegen lassen sich offenbar ganzzahlige Potenzen von freien Homotopieklassen wie folgt erklären: Ist m eine

ganze Zahl und θ eine freie Homotopieklasse auf M , so bezeichne θ^m diejenige freie Homotopieklasse, welche die Wege $\gamma^m, \gamma \in \theta$ enthält. Wir nennen eine freie Homotopieklasse Π primitiv, wenn es keine Darstellung $\Pi = \theta^m$ mit ganzem $m \neq \pm 1$ gibt.

Jede freie Homotopieklasse enthält rektifizierbare Wege, d.h. Wege von endlicher Länge bezüglich der zu M gehörigen Riemannschen Metrik. Das Infimum $\ell(\theta)$ der Weglängen aller rektifizierbaren Wege einer freien Homotopieklasse θ von M heiße die Länge von θ . Weil M kompakt ist, enthält jede freie Homotopieklasse θ von M ein geodätisches Segment $\gamma: [0,1] \rightarrow M$ der Länge $\ell(\theta)$, welches sich zu einer periodischen Geodätischen $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M, \gamma(t) = \gamma(t+1) \forall t \in \mathbb{R}$, fortsetzen lässt (vgl. [2], p.243). Wir nennen sowohl das Segment $\gamma: [0,1] \rightarrow M$ als auch dessen periodische Fortsetzung $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ eine differenzierbar geschlossene Geodätische von θ .

Für die weiteren Betrachtungen stützen wir uns nun auf die folgenden Tatsachen:

Lemma 1

Sind γ und μ differenzierbar geschlossene Geodätische derselben freien Homotopieklasse $\theta \neq \emptyset$ auf M , so gilt für ein passendes $b \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$: $\mu(t) = \gamma(t+b)$.

Lemma 2

Jede freie Homotopieklasse $\theta \neq \emptyset$ auf M besitzt eine eindeutige Darstellung $\theta = \Pi^m$, in welcher Π primitiv und m eine natürliche Zahl ist.

Wir definieren: Die durch Lemma 2 jeder freien Homotopieklasse zugeordnete natürliche Zahl $\nu(\theta) = m$ heiße die Vielfachheit von θ .

In §3 werden wir zeigen, dass die angeführten Lemmata für beliebige kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit durchweg negativer (nicht notwendigerweise konstanter) Schnittkrümmung gültig sind.

1.4. Wir verwenden Lemma 1 dazu, den freien Homotopieklassen neben Länge und Vielfachheit weitere Größen zuzuordnen, welche im Laufe der Untersuchungen auftreten werden.

Es sei $\theta \neq \emptyset$ eine freie Homotopieklasse auf M und $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ eine differenzierbar geschlossene Geodätische von θ . γ_γ bezeichne die

Parallelverschiebung von Tangentialvektoren entlang des Segments $\gamma|[0,1]$. Wegen $\gamma(0)=\gamma(1)$ ist P_γ eine lineare Isometrie des Tangentialraums $M_{\gamma(0)}$ auf sich. Sie besitzt daher n (eventuell komplexe) Eigenwerte vom Betrag 1. Weil γ eine periodische Geodätische der Periode 1 ist, ist $\dot{\gamma}$ ein Parallelfeld längs γ mit $\dot{\gamma}(0)=\dot{\gamma}(1)$, und deshalb gilt $P_\gamma(\dot{\gamma}(0))=\dot{\gamma}(0)$. Zudem ist $\dot{\gamma}(0)\neq 0$, denn sonst wäre $\gamma(t)=\gamma(0)$ für alle t , und damit würde $\gamma|[0,1]$ zur trivialen Homotopieklasse gehören. P_γ besitzt daher stets den Eigenwert 1, und die restlichen $n-1$ Eigenwerte sind die Eigenwerte der Restriktion von P_γ auf den invarianten Teilraum der zu $\dot{\gamma}(0)$ orthogonalen Tangentialvektoren.

Nun sei μ eine weitere differenzierbar geschlossene Geodätische von θ . Wir behaupten, die Eigenwerte von P_γ und P_μ seien dieselben. In der Tat: Man wähle etwa eine Orthonormalbasis $A_1, \dots, A_n$ des Vektorraums $M_{\gamma(0)}$. Dann gilt

$$P_\gamma(A_i) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} A_k \quad (i=1, \dots, n)$$

und die Eigenwerte von P_γ sind die Eigenwerte der orthogonalen Matrix (α_{ik}) . Nun gibt es eindeutig bestimmte Parallelfelder X_i längs der Geodätischen $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $X_i(0) = A_i$ ($i=1, \dots, n$). Offenbar gilt

$$(1) \quad P_\gamma(A_i) = X_i(1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} X_k(0) \quad (i=1, \dots, n).$$

Wegen $\gamma(t) = \gamma(t+1)$ ist auch $X_i(t+1)$ für $i=1, \dots, n$ ein Parallelfeld längs γ , und somit folgt aus (1)

$$(2) \quad X_i(t+1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} X_k(t) \quad (t \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n).$$

Nach Lemma 1 gilt aber für ein passendes $b \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$: $\mu(t) = \gamma(t+b)$. Die Tangentialvektoren $X_1(b), \dots, X_n(b)$ bilden deshalb eine Orthonormalbasis von $M_{\mu(0)}$, und die Vektorfelder $X_i(t+b)$ sind längs $\mu(t)$ parallel. Damit erhalten wir aus (2) für $t=b$:

$$P_\mu(X_i(b)) = X_i(b+1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} X_k(b) \quad (i=1, \dots, n).$$

Dies beweist die Behauptung.

Damit können wir jetzt jeder freien Homotopieklasse $\theta \neq \sigma$ von M $n-1$ reelle Zahlen $\alpha_1(\theta), \dots, \alpha_{n-1}(\theta)$ wie folgt zuordnen: Ist γ eine differenzierbar geschlossene Geodätische von θ , $P_\gamma: M_{\gamma(0)} \rightarrow M_{\gamma(0)}$ die Parallelverschiebung längs $\gamma|[0,1]$, und sind $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ die Eigen-

werte der Restriktion von P_{θ} auf den invarianten Teilraum der zu $j(\theta)$ orthogonalen Tangentialvektoren, so werde

$$\alpha_i(\theta) = \text{Realteil von } \beta_i$$

gesetzt. Die Zahlen $\alpha_1(\theta), \dots, \alpha_{n-1}(\theta)$ sind nach dem soeben Gezeigten bis auf ihre Nummerierung eindeutig bestimmt und dem Betrag nach kleiner gleich 1. Da zudem $\ell(\theta) > 0$ ist, erlaubt dies folgende

Definition 2

Ist $\theta \neq \emptyset$ eine freie Homotopieklasse auf der n-dimensionalen hyperbolischen Raumform M mit der Schnittkrümmung $-k$, $k > 0$, so heisse die Zahl

$$\mu(\theta) := \frac{\sqrt{k}}{\nu(\theta)} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\cos(\sqrt{k}\ell(\theta))}{\cos(\sqrt{k}\ell(\theta)) - \alpha_i(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

das Gewicht von θ .

Dieser Grösse kommt in unseren Ergebnissen eine wichtige Bedeutung zu.

1.5. Die Ergebnisse dieser Arbeit fassen wir nun in zwei Sätzen zusammen. Der erste gibt Aufschluss über die asymptotische Verteilung der Längen von freien Homotopieklassen hyperbolischer Raumformen.

Satz A.

Es sei M eine n-dimensionale hyperbolische Raumform der Schnittkrümmung $-k$, $k > 0$. Für $t \geq 0$ bezeichne $N_M(t)$ die Anzahl aller freien Homotopieklassen der Länge $\leq t$ auf M und $P_M(t)$ die Anzahl aller primitiven freien Homotopieklassen der Länge $\leq t$ auf M. Für jedes t sind dann $N_M(t)$ und $P_M(t)$ endlich, und es gilt

$$P_M(t) \sim N_M(t) \sim \frac{\frac{1}{2}\sqrt{k}(n-1)t}{\sqrt{k}^{n-1}(n-1)t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Bemerkenswert ist, dass in der asymptotischen Darstellung für $P_M(t)$ und $N_M(t)$ Dimension und Krümmung als einzige Invarianten auftreten.

Nach Satz A gibt es zu jedem $t > 0$ höchstens endlich viele freie Homotopieklassen der Länge $\leq t$ auf M. Dies erlaubt folgende Definition:

Definition 3

Die für alle reellen $t > 0$ definierte Funktion $h_M(t) := \sum_{\ell(\theta) = t} \mu(\theta)$ heiße das geometrische Spektrum der hyperbolischen Raumform M .

(Man beachte: Es ist $h_M(t) = 0$ zu setzen, wenn es auf M keine freie Homotopieklasse der Länge t gibt, andernfalls sind die gemäß Definition 2 gebildeten Gewichte sämtlicher freien Homotopieklassen der Länge t zu summieren).

Die Bedeutung des geometrischen Spektrums wird aus dem folgenden Satz ersichtlich, dessen Beweis das eigentliche Ziel dieser Arbeit darstellt:

Satz B

Zwei hyperbolische Raumformen besitzen genau dann dasselbe Eigenwertspektrum, wenn sie dasselbe geometrische Spektrum besitzen.

1.6. Es sei M eine zweidimensionale, orientierbare hyperbolische Raumform der Schnittkrümmung -1 . Als Lngenspektrum von M wird die Funktion

$$h_M^*(t) := \sum_{\ell(\theta) = t} \frac{1}{\chi(\theta)} \quad (t > 0)$$

bezeichnet. Zwischen dem Lngenspektrum und dem geometrischen Spektrum von M besteht folgender Zusammenhang:

$$(1) \quad h_M(t) = \sqrt{\frac{\cosh t}{\cosh t - 1}} h_M^*(t) \quad (t > 0).$$

In der Tat: Da M orientierbar ist, ist für jede differenzierbare und geschlossene Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, der Isomorphismus P_γ der Parallelverschiebung längs γ orientierungstreu. Hieraus und aus 1.4 folgt

$$\mu(\theta) = \frac{1}{\chi(\theta)} \sqrt{\frac{\cosh \ell(\theta)}{\cosh \ell(\theta) - 1}}$$

für alle freien Homotopieklassen $\theta \neq \emptyset$ von M . Dies beweist (1).

Aufgrund von Satz B und (1) erhalten wir daher auch hier den von H. Huber in [6] bewiesenen Satz: Zwei orientierbare, zweidimensionale hyperbolische Raumformen besitzen genau dann dasselbe Eigenwertspektrum, wenn sie dasselbe Lngenspektrum besitzen.

§2. Der Laplace-Operator

2.1. Es sei $M = (M, g)$ eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $(x_1, \dots, x_n)$ ein lokales Koordinatensystem auf M , in dem der Massentensor g die Darstellung

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

besitzt. Die zu M gehörigen Beltramischen Differentialoperatoren Δ^M und ∇^M haben dann im Koordinatensystem $(x_1, \dots, x_n)$ die Gestalt

$$(1) \quad \Delta^M f = - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad (f \in C^2(M)),$$

$$(2) \quad \nabla^M f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (f \in C^1(M)).$$

Dabei ist $\det g$ die Determinante und (g^{ij}) die Inverse der Matrix (g_{ij}) .

2.2. Die Beltramischen Differentialoperatoren besitzen folgende wichtige Invarianzeigenschaft: Es seien M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und $\Psi: N \rightarrow M$ eine differenzierbare längentreue Abbildung. Dann gilt

$$(1) \quad \Delta^N (f \circ \Psi) = (\Delta^M f) \circ \Psi \quad (f \in C^2(M)),$$

$$(2) \quad \nabla^N (f \circ \Psi) = (\nabla^M f) \circ \Psi \quad (f \in C^1(M)).$$

2.3. Für die folgenden Betrachtungen wird M als kompakte, n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit vorausgesetzt. Dann hat man auf den komplexen Vektorräumen $C^k(M)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$, eine Prähilbertraumstruktur mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, h \rangle = \int_M f \bar{h} dV_M$$

und der zugehörigen Norm $\| \cdot \|_M = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ ($\int_M dV_M$ bezeichne stets das zum Massentensor g auf M gehörige Integral mit dem lokalen Volumenelement $dV_M = \det g dx_1 \dots dx_n$). Der Laplace-Operator $\Delta^M: C^2(M) \rightarrow C^0(M)$ ist bekanntlich ein selbstadjungierter und nicht negativer linearer Operator:

$$(1) \quad \langle \Delta^M f, h \rangle = \langle f, \Delta^M h \rangle \quad \forall f, h \in C^2(M),$$

$$(2) \quad \langle \Delta^M f, f \rangle \geq 0 \quad \forall f \in C^2(M).$$

2.4. Wir behandeln jetzt einige Aspekte des Eigenwertproblems $\Delta^M \psi = \lambda \psi$ für eine beliebige kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit M . Aus 2.3.(1) und 2.3.(2) folgt, dass die Eigenwerte alle reell und nicht negativ sind, und dass $E_\lambda(M)$ und $E_{\lambda'}(M)$ für $\lambda \neq \lambda'$ orthogonal sind.

Der zum trivialen Eigenwert $\lambda=0$ gehörige Eigenraum $E_0(M)$ ist ein-dimensional und wird durch das normierte Basiselement $\psi_0 = \sqrt{1/\text{Vol}(M)}$, $\|\psi_0\|_M = 1$, aufgespannt. Mit H bezeichnen wir den Operator, der jedem $f \in C^\infty(M)$ seine harmonische Komponente $Hf := \langle f, \psi_0 \rangle \psi_0$ zuordnet. Zur Lösung des vorliegenden Eigenwertproblems kann man sich nun einer Methode von de Rham ([8], p.157, Théoreme 23) bedienen. Danach gibt es genau einen linearen Operator $G: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, welcher die Bedingungen

$$(1) \quad G \Delta^M f = \Delta^M Gf = f - Hf$$

$$(2) \quad HGf = GHf = 0$$

für alle $f \in C^\infty(M)$ erfüllt. Dieser Operator besitzt folgende Eigenschaften:

- (I) G ist ein kompakter, selbstadjungierter, nicht negativer ($\langle Gf, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in C^\infty(M)$) linearer Operator.
- (II) Für jedes ganze $m > \frac{n}{2}$ ($n = \dim M$) ist G^m ein linearer Integraloperator mit stetigem Kern $k^{(m)} \in C^0(M \times M)$:

$$G^m f(p) = \int_M f(q) k^{(m)}(p, q) dV_M(q).$$

Bemerkung zu (II): Der Operator G selbst hat einen polaren Kern k . Dieser ist beliebig oft differenzierbar ausserhalb der Diagonalen von $M \times M$ und genügt für $p \neq q$ der Abschätzung

$$|k(p, q)| \leq \begin{cases} c g(p, q)^{2-n} & \text{falls } n = \dim M > 2 \\ c |\log g(p, q)| & \text{falls } n = 2 \end{cases}$$

Dabei ist c eine nur von M abhängige Konstante und g die Riemannsche Metrik auf M . Hieraus folgt, dass der aus k durch Faltung entstehende Kern $k^{(m)}$ von G^m für $m > \frac{n}{2}$ eine auf ganz $M \times M$ stetige Funktion ist; vgl. dazu [7], p.111.

Nun gelingt die Lösung des Eigenwertproblems $\Delta^M \varphi = \lambda \varphi$, indem man das Eigenwertproblem $\lambda G \varphi = \varphi$ für den Operator G löst. Aus (1) und (2) ergibt sich nämlich leicht:

(III) Für alle $\lambda \neq 0$ ist $E_\lambda(M) = \{ \varphi \in C^\infty(M) / \lambda G \varphi = \varphi \}$.

(IV) Es gilt $C^\infty(M) = E_0(M) \oplus G(C^\infty(M))$, und diese Zerlegung ist orthogonal.

Im Rahmen der Theorie kompakter selbstadjungierter Operatoren erhalten wir jetzt neben den in 1.2 erwähnten Tatsachen das folgende, für uns wichtige Resultat:

Lemma 1

M sei eine kompakte, n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots$ sei die aus allen Eigenwerten bestehende Spektralfolge von Δ^M , in der jeder Eigenwert λ genau so oft aufgeführt wird, wie seine Vielfachheit $d_M(\lambda)$ beträgt. Dann gibt es ein zur Spektralfolge gehöriges Orthonormalsystem $\{\varphi_j / j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ von Eigenfunktionen $\varphi_j \in E_{\lambda_j}(M)$, $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk}$. Dieses besitzt folgende Eigenschaften:

- (a) Für jedes $f \in C^0(M)$ konvergiert die Fourierreihe $\sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_M$ gegen f auf M .
- (b) Für jedes ganze $m > \frac{n}{2}$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m}$, und die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m} |\varphi_j|^2$ konvergiert gleichmäßig auf M .

Beweis:

(a): Aus (I), (III) und (IV) folgt, dass das Orthonormalsystem $\{\varphi_j / j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ in $C^\infty(M)$ und damit auch in $C^0(M)$ vollständig ist.

(b): Aus (I) und (III) folgt: Der Operator G^m ist ein kompakter, selbstadjungierter und nicht negativer Integraloperator, dessen Kern $k^{(m)}$ für $m > \frac{n}{2}$ auf $M \times M$ stetig ist; er besitzt die Spektralfolge $\{\lambda_j^m / j \in \mathbb{N}\}$, und $\{\varphi_j / j \in \mathbb{N}\}$ ist ein zugehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen.

Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m} \varphi_j(p) \overline{\varphi_j(q)}$ stellt daher die Bilinearentwicklung von $k^{(m)}(p, q)$ dar, und bei stetigen Kernen von nicht-negativen

Operatoren ist die gleichmässige Konvergenz gewährleistet. Daher gilt für alle $p \in M$, $m > \frac{n}{2}$

$$k^{(m)}(p, p) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m} |\varphi_j(p)|^2$$

und die Reihe rechts konvergiert gleichmässig auf M . Hieraus folgt

$$\int_M k^{(m)}(p, p) dV_M(p) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m} \int_M |\varphi_j|^2 dV_M = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m} < +\infty \quad (m > \frac{n}{2}).$$

Dies beweist die Behauptung (b).

2.5. Aus [1], p.215-222, entnehmen wir das folgende Resultat: Es sei M eine kompakte, n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert für $t > 0$ die Funktion

$$(1) \quad Z(t) = \sum_{\lambda > 0} d_M(\lambda) e^{-\lambda t},$$

und es gilt

$$(2) \quad (4\pi t)^{\frac{1}{2}n} Z(t) = \text{Vol}(M) + \frac{t}{6} \int_M \tau dV_M + O(t^2) \quad (t \downarrow 0),$$

wobei τ die Skalarkrümmung von M bezeichnet.

Ist insbesondere die Schnittkrümmung k von M konstant, so gilt $\tau = n(n-1)k$. Wegen (1) und (2) ergibt sich hieraus unmittelbar das

Lemma 2

Hyperbolische Raumformen mit gleichem Eigenwertspektrum besitzen auch gleiche Dimension, gleiches Volumen und gleiche Schnittkrümmung.

§3. Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung

3.1. Wir betrachten im folgenden universelle Ueberlagerungen von Mannigfaltigkeiten mit überall negativer Schnittkrümmung. Einige der angeführten Ergebnisse findet man in [4], Abschnitt 7.2.

Ist M eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit und H eine universelle (topologische) Ueberlagerungsmannigfaltigkeit von M , so induziert die zugehörige Ueberlagerungsabbildung $\Psi: H \rightarrow M$ in kanonischer Weise auf H die Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, sodass Ψ differenzierbar und längentreu wird. Dies hat zur Folge, dass H genau dann vollständig ist, wenn M vollständig ist. Im weiteren ist die Schnittkrümmung von H bezüglich einer Tangentialebene σ gleich der Schnittkrümmung von M bezüglich der Ebene $\Psi_*(\sigma)$. Die zur Fundamentalgruppe von M isomorphe Decktransformationsgruppe ist eine fixpunktfreie und stark diskontinuierliche Untergruppe der Isometriegruppe von H .

Den Untersuchungen in §3 legen wir nun die folgenden Annahmen zugrunde:
Voraussetzungen: Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ mit überall negativer Schnittkrümmung, H universelle Ueberlagerungsmannigfaltigkeit von M , $\Psi: H \rightarrow M$ differenzierbare längentreue Ueberlagerungsabbildung mit zugehöriger Deckgruppe D .

Als kompakte Mannigfaltigkeit ist M vollständig. Es ist daher H eine n -dimensionale, einfach zusammenhängende und vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit überall negativer Schnittkrümmung. Ist insbesondere M eine hyperbolische Raumform der Schnittkrümmung $-k$, $k > 0$, so besitzt auch H die konstante Schnittkrümmung $-k$.

3.2. Wir erwähnen zunächst einige Eigenschaften, die sich aus den Sätzen von Hopf-Rinow und Cartan-Hadamard für die Mannigfaltigkeit H ergeben. $g(p, q)$ bezeichne die Distanz zweier Punkte p, q von H .

Wegen der Vollständigkeit von H kann jede Geodätische von H auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden. Für jede Geodätische $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$ ist $\|\dot{\gamma}(t)\|$ eine konstante Funktion von t in $\mathbb{R}$. Diese Konstante $\|\dot{\gamma}\|$ ist genau dann von Null verschieden, wenn die Abbildung γ selbst nicht konstant ist. Das Bild $\gamma(\mathbb{R})$ einer nicht konstanten Geodätischen $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$ heiße eine Gerade von H . Zwei Geodätische γ_1 und γ_2 von H definieren bekanntlich genau dann dieselbe Gerade, wenn sie durch eine lineare Transformation $t \mapsto at+b$ ($a \neq 0$) auseinander hervorgehen: $\gamma_2(t) = \gamma_1(at+b)$.

Ist q ein beliebiger Punkt von H und $A \in H_q$, so gibt es genau eine Geodätische $\gamma_A: \mathbb{R} \rightarrow H$ mit $\gamma_A(0) = q$ und $\dot{\gamma}_A(0) = A$. Die Exponentialabbildung $\exp_q: H_q \rightarrow H$ ist definiert durch $\exp_q(A) = \gamma_A(1)$. Für die Geodätische γ_A hat man dann die Darstellung

$$(1) \quad \gamma_A(t) = \exp_q(tA).$$

Wegen des einfachen Zusammenhangs und der negativen Schnittkrümmung von H liefert $\exp_q$ für jedes $q \in H$ einen Diffeomorphismus von H_q auf H , und es gilt

$$(2) \quad g(q, \exp_q(A)) = \|A\| \quad \text{für alle } A \in H_q.$$

Wegen (1) sind daher insbesondere alle nicht konstanten Geodätischen injektiv. Aus (1) und (2) folgt für jede Geodätische $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$ leicht

$$(3) \quad g(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \|\dot{\gamma}\| |t_1 - t_2|, \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Schliesslich werden wir von der folgenden, für die Theorie der Räume negativer Krümmung grundlegenden Tatsache Gebrauch machen: Es seien γ_1 und γ_2 nicht konstante Geodätische von H , welche verschiedene Geraden darstellen: $\gamma_1(\mathbb{R}) \neq \gamma_2(\mathbb{R})$. Dann ist $g(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ eine streng konvexe Funktion von t in $\mathbb{R}$, also für $t_1 \neq t_2$

$$(4) \quad g\left(\gamma_1\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right), \gamma_2\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right) < \frac{1}{2}g(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_1)) + \frac{1}{2}g(\gamma_1(t_2), \gamma_2(t_2)).$$

3.3. Wir bezeichnen im folgenden stets mit $I(H)$ die Gruppe der Isometrien von H , welche aus allen längentreuen Diffeomorphismen von H auf sich besteht. Als Verschiebungslänge einer Isometrie $T \in I(H)$ definiert man die Zahl

$$\ell(T) := \inf_{p \in H} g(T(p), p).$$

Ist S ein weiteres Element von $I(H)$, so gilt $g(STS^{-1}(p), p) = g(TS^{-1}(p), S^{-1}(p))$ für alle $p \in H$, und wegen $S^{-1}(H) = H$ folgt hieraus

$$(1) \quad \ell(STS^{-1}) = \ell(T) \quad \text{für alle } S, T \in I(H).$$

3.4. Eine Isometrie $T \in I(H)$ heisse eine Translation, wenn es eine nicht konstante Geodätische $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$ derart gibt, dass

$$(1) \quad T(\gamma(t)) = \gamma(t+1) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Die Gerade $\gamma(\mathbb{R})$ ist dann unter T invariant. Wir zeigen zunächst, dass aus (1)

$$(2) \quad \|\dot{\gamma}\| = g(T(\gamma(t)), \gamma(t)) = \ell(T)$$

folgt. Demnach ist $\ell(T) > 0$ für jede Translation T , und T ist fixpunktfrei.

Beweis von (2): Sei $p \in H$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Die Dreiecksungleichung liefert:

$$g(\gamma(t), T^k(\gamma(t))) \leq g(\gamma(t), p) + \sum_{j=1}^k g(T^{j-1}(p), T^j(p)) + g(T^k(p), T^k(\gamma(t))).$$

Weil T eine Isometrie ist, ist die rechte Seite gleich

$2g(\gamma(t), p) + kg(p, T(p))$, während sich aus 3.2.(3) für die linke Seite $g(T^k(\gamma(t)), \gamma(t)) = g(\gamma(t+k), \gamma(t)) = k\|\dot{\gamma}\| = kg(T(\gamma(t)), \gamma(t))$ ergibt. Wir erhalten $\|\dot{\gamma}\| = g(T(\gamma(t)), \gamma(t)) \leq \frac{2}{k} g(p, \gamma(t)) + g(T(p), p)$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$, $p \in H$, woraus $g(T(\gamma(t)), \gamma(t)) \leq g(T(p), p)$ für alle $p \in H$ folgt. Dies beweist die Relation (2).

Lemma 1

Für jede Translation $T \in I(H)$ und alle ganzen m gilt $\ell(T^m) = |m| \ell(T)$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine Geodätische γ von H , sodass $T(\gamma(t)) = \gamma(t+1)$. Setzen wir $\mu(t) = \gamma(mt)$, so ist auch μ eine Geodätische von H , und es gilt $T(\mu(t)) = \mu(t+1)$. Wegen $\|\dot{\mu}\| = |m|\|\dot{\gamma}\|$ folgt jetzt aus (2) $\ell(T^m) = \|\dot{\mu}\| = |m| \ell(T)$, q.e.d.

Lemma 2

Vor: $T \in I(H)$ sei eine Translation. γ_1 und γ_2 seien Geodätische von H , und es gelte $T(\gamma_i(t)) = \gamma_i(t+1)$ für $i=1,2$ und alle $t \in \mathbb{R}$.

Beh: $\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma_2(t) = \gamma_1(t+b)$.

Beweis: Wir zeigen zuerst $\gamma_1(\mathbb{R}) = \gamma_2(\mathbb{R})$. Ist nämlich m eine ganze Zahl, so gilt

$$g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = g(T^m(\gamma_1(t)), T^m(\gamma_2(t))) = g(\gamma_1(t+m), \gamma_2(t+m)),$$

insbesondere also

$$g(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = g(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) = g(\gamma_1(2), \gamma_2(2)).$$

Wegen der Fixpunktfreiheit von T sind γ_1 und γ_2 nicht konstante Geodätische. Wäre nun $\gamma_1(\mathbb{R}) \neq \gamma_2(\mathbb{R})$, so würde sich aus 3.2.(4) der Widerspruch $g(\gamma_1(1), \gamma_2(1)) < \frac{1}{2}g(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + \frac{1}{2}g(\gamma_1(2), \gamma_2(2))$ ergeben. Aus

$\gamma_1(\mathbb{R}) = \gamma_2(\mathbb{R})$ folgt jetzt $\gamma_2(t) = \gamma_1(at+b)$, $a \neq 0$. Nun ist einerseits $\|\dot{\gamma}_2\| = |a| \|\dot{\gamma}_1\|$, andererseits $\|\dot{\gamma}_2\| = \|\dot{\gamma}_1\| = \ell(T) > 0$ wegen (2), also $a = \pm 1$. $a = -1$ kommt aber nicht in Frage, denn sonst wäre $\gamma_2(1) = T(\gamma_2(0)) = T(\gamma_1(b)) = \gamma_1(b+1) = \gamma_2(-1)$, was der Injektivität der Geodätischen γ_2 widerspricht.

3.5. Die Translationen können noch auf eine andere Weise charakterisiert werden: Es sei γ eine nicht konstante Geodätische von H und T ein fixpunktfreies Element von $I(H)$, welches die Gerade $\gamma(\mathbb{R})$ invariant lässt: $T(\gamma(\mathbb{R})) = \gamma(\mathbb{R})$. Dann gilt $T(\gamma(t)) = \gamma(t+b)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und ein durch γ und T eindeutig bestimmtes $b \neq 0$.

In der Tat: Die beiden nicht konstanten Geodätischen γ und $\mu := T \circ \gamma$ von H definieren dieselbe Gerade. Es ist also $\mu(t) = \gamma(at+b)$, $a \neq 0$. Weil jede nicht konstante Geodätische eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ in H ist, sind dabei a und b eindeutig bestimmt. Nun ist einerseits $\|\dot{\mu}(t)\| = \|T_*(\dot{\gamma}(t))\| = \|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$, andererseits $\|\dot{\mu}(t)\| = |a| \|\dot{\gamma}(at+b)\| = |a| \|\dot{\gamma}(t)\|$, also $a = 1$. Da aber T fixpunktfrei ist, muss $a = 1$ und $b \neq 0$ sein.

Setzen wir jetzt $\overline{\gamma}(t) = \gamma(bt)$, so ist $\overline{\gamma}$ wegen $b \neq 0$ eine nicht konstante Geodätische von H und $T(\overline{\gamma}(t)) = \overline{\gamma}(t+1)$, also T eine Translation von H . Translationen von H sind daher genau diejenigen fixpunktfreien Isometrien, welche eine Gerade von H invariant lassen. Aus Lemma 2 ergibt sich nun unmittelbar das folgende

Lemma 3

Jede Translation von H lässt genau eine Gerade von H invariant.

3.6. Grundlegend für die weiteren Untersuchungen ist die folgende Tatsache: Zwei geschlossene Wege auf M

$$\gamma, \mu: [0, 1] \rightarrow M, \quad \gamma(0) = \gamma(1) = p, \quad \mu(0) = \mu(1) = q$$

sind genau dann frei homotop, wenn es einen Weg $\nu: [0, 1] \rightarrow M$ mit Anfangspunkt $\nu(0) = p$ und Endpunkt $\nu(1) = q$ derart gibt, dass die beiden von p nach q führenden Wege $\gamma\nu$ und $\nu\mu$ (p, q)-homotop sind, wenn es also eine stetige Deformationsabbildung zwischen $\gamma\nu$ und $\nu\mu$ gibt, bei der alle Deformationswege von p nach q führen ($\gamma\nu: [0, 1] \rightarrow M$ bezeichnet wie üblich den durch $\gamma\nu(t) = \gamma(2t)$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, $\gamma\nu(t) =$

$= \nu(2t-1)$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ definierten Weg). Sind γ und μ frei homotop vermöge der Deformationsabbildung $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow M$, so ist $\nu(s) = F(s,0) = F(s,1)$, $0 \leq s \leq 1$, ein solcher Weg.

3.7. Mit Hilfe von 3.6 zeigen wir:

Lemma 4

Jedes von der Identität verschiedene Element der Deckgruppe D ist eine Translation.

Beweis: Sei $T \in D$, $T \neq \text{id}$ und $\bar{p} \in H$. Wir wählen einen Weg $\bar{\gamma}: [0,1] \rightarrow H$, welcher $\bar{p}$ mit $T(\bar{p})$ verbindet

$$(1) \quad \bar{\gamma}(0) = \bar{p}, \quad T(\bar{\gamma}(0)) = \bar{\gamma}(1).$$

$\bar{\gamma}$ ist Ueberlagerungsweg des geschlossenen Weges $\gamma = \Psi \circ \bar{\gamma}: [0,1] \rightarrow M$. Da M kompakt ist, ist γ frei homotop zu einer differenzierbar geschlossenen Geodätischen $\mu: [0,1] \rightarrow M$. Ist $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow M$ die zugehörige Deformationsabbildung, und wird $\gamma(0) = p$, $\mu(0) = q$, $\nu(s) = F(s,0)$ für $0 \leq s \leq 1$ gesetzt, so sind nach 3.6 die beiden von p nach q führenden Wege $\gamma\nu$ und $\nu\mu$ (p,q)-homotop. Die beiden von $\bar{p}$ ausgehenden Ueberlagerungswege von $\gamma\nu$ und von $\nu\mu$ enden daher im gleichen Punkt. Ist nun $\bar{\nu}: [0,1] \rightarrow H$ der Ueberlagerungsweg von ν mit dem Anfangspunkt $\bar{\nu}(0) = \bar{p}$ und $\bar{\mu}: [0,1] \rightarrow H$ der Ueberlagerungsweg von μ mit dem Anfangspunkt $\bar{\mu}(0) = \bar{\nu}(1)$, so hat der von $\bar{p}$ ausgehende Ueberlagerungsweg von $\nu\mu$ den Endpunkt $\bar{\mu}(1)$ und - wegen (1) - der von $\bar{p}$ ausgehende Ueberlagerungsweg von $\gamma\nu$ den Endpunkt $T(\bar{\nu}(1)) = T(\bar{\mu}(0))$. Daher gilt

$$(2) \quad T(\bar{\mu}(0)) = \bar{\mu}(1).$$

Nun lässt sich μ definitionsgemäss zu einer periodischen Geodätischen

$$(3) \quad \mu: \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \mu(t) = \mu(t+1)$$

fortsetzen, und damit auch $\bar{\mu}$ zu einem Ueberlagerungsweg $\bar{\mu}: \mathbb{R} \rightarrow H$ von $\mu: \mathbb{R} \rightarrow M$. Da die Ueberlagerungsabbildung längentreu ist, ist $\bar{\mu}$ eine Geodätische von H .

Sei nun $\tau \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\mu_\tau(t) = \mu(\tau + t)$. Wegen (3) ist $\mu_\tau: [0,1] \rightarrow M$ ein geschlossener Weg auf M , und die Deformationsabbildung $F_\tau(s,t) = \mu(\tau s + t)$, $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$, vermittelt eine freie Homotopie von μ_τ zu $\mu|_{[0,1]}$. Wegen (2) folgt hieraus $T(\bar{\mu}(\tau)) = \bar{\mu}(\tau+1)$ mit derselben Schlussweise wie von (1) auf (2). Daher ist T eine Translation, denn wegen der Fixpunktfreiheit von T ist die Geodätische $\bar{\mu}$ nicht konstant.

3.8. Ein Element P von D heiße primitiv, wenn es keine Darstellung $P = S^m$ mit $S \in D$ und ganzem $m \neq \pm 1$ gibt. Mit P ist offenbar auch P^{-1} und jedes zu P innerhalb D konjugierte Element primitiv.

Wir nennen ferner eine Gerade α von H eine Achse der Gruppe D , wenn mindestens ein $T \in D - \{id\}$ die Gerade α invariant lässt: $T(\alpha) = \alpha$.

Lemma 5

Es sei α eine Achse von D und $D(\alpha) = \{S \in D / S(\alpha) = \alpha\}$. Dann gilt:

- (a) $D(\alpha)$ ist eine unendlich zyklische Untergruppe von D .
- (b) $D(\alpha)$ enthält genau zwei primitive Elemente. Wird $D(\alpha)$ von P erzeugt, so sind P und P^{-1} diese primitiven Elemente.

Beweis (a): $D(\alpha)$ ist offensichtlich eine Untergruppe von D . Ist α das Bild der Geodätischen $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$, so gibt es nach 3.5 zu jedem $S \in D(\alpha)$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $b(S)$ derart, dass $S(\gamma(t)) = \gamma(t + b(S))$. Dabei gilt $b(S_1 S_2) = b(S_1) + b(S_2)$, und $b(S) = 0$ ist nur für $S = id$ möglich. Die Abbildung $S \mapsto b(S)$ liefert daher einen Isomorphismus von $D(\alpha)$ auf die additive Untergruppe $B = \{b(S) / S \in D(\alpha)\}$ von $\mathbb{R}$. Andererseits ist $D(\alpha)$ als Untergruppe von D stark diskontinuierlich, und hieraus erkennt man leicht, dass B diskret sein muss. Da $D(\alpha)$ mindestens ein von der Identität verschiedenes Element enthält, ist B unendlich zyklisch und mithin auch $D(\alpha)$.

Beweis (b): Jedes in $D(\alpha)$ enthaltene primitive Element ist notwendigerweise eine Erzeugende von $D(\alpha)$. Andererseits sind die beiden Erzeugenden P und P^{-1} auch tatsächlich primitiv. Sei nämlich $P = S^m$, $S \in D$, m ganz. Nach Lemma 4 sind P und S Translationen. Sie lassen also nach Lemma 3 genau eine Gerade von H invariant. Ist α_s die unter S invariante Gerade, $S(\alpha_s) = \alpha_s$, so folgt aber aus $P(\alpha_s) = S^m(\alpha_s) = \alpha_s$ und $P(\alpha) = \alpha: \alpha = \alpha_s$. Somit gehört auch S zu $D(\alpha)$, besitzt also eine Darstellung $S = P^k$. Man hat daher $P = P^{km}$, und hieraus folgt, weil P ein Element unendlicher Ordnung ist: $km = 1$, also $m = 1$. Dies beweist die Behauptung (b).

Aufgrund von Lemma 3 und Lemma 4 lässt jedes $T \in D - \{id\}$ genau eine Gerade α_T von H invariant, und es gilt

$$(1) \quad T \in D(\alpha_T)$$

$$(2) \quad \alpha_{T^m} = \alpha_T \quad \text{für } m \neq 0$$

$$(3) \quad \alpha_{STS^{-1}} = S(\alpha_T) \quad \text{für } S \in D.$$

Aus (1), (2) und Lemma 5 ergibt sich nun unmittelbar das

Lemma 6

Jedes $T \in D - \{\text{id}\}$ besitzt genau eine Darstellung $T = P^m$, in der P ein primitives Element und m eine natürliche Zahl ist.

Die durch Lemma 6 jedem $T \in D - \{\text{id}\}$ eindeutig zugeordnete natürliche Zahl $\nu(T) = m$ heiße die Vielfachheit von T . Die primitiven Elemente von D sind gerade diejenigen mit der Vielfachheit 1.

3.9. Wir betrachten Klassen konjugierter Elemente von D . Offenbar besitzen sämtliche Elemente einer festen Klasse die gleiche Vielfachheit und nach 3.3.(1) auch die gleiche Verschiebungslänge. Daher kann jeder Klasse K durch

$$\ell(K) := \ell(T), \quad \nu(K) := \nu(T) \quad T \in K$$

eine Länge $\ell(K)$ und eine Vielfachheit $\nu(K)$ zugeordnet werden. Eine Klasse K der Vielfachheit $\nu(K) = 1$ möge primitiv heißen; primitive Klassen bestehen aus lauter primitiven Elementen. Ist K eine Klasse konjugierter Elemente von D und m eine ganze Zahl, so bezeichne K^m die Klasse $\{T^m / T \in K\}$. Aufgrund von Lemma 6 gilt jetzt:

- (I) Jede Klasse $K \neq \{\text{id}\}$ konjugierter Elemente von D besitzt eine eindeutige Darstellung $K = P^m$ mit einer primitiven Klasse P und natürlichem m . Dabei ist $m = \nu(K)$.

Da jede Klasse $K \neq \{\text{id}\}$ aus lauter Translationen gleicher Verschiebungslänge besteht, folgt aus Lemma 1:

- (II) Für jede Klasse K konjugierter Elemente von D und alle ganzen m gilt $\ell(K^m) = |m| \ell(K)$.

Andererseits kann jeder freien Homotopieklasse θ von M eine Klasse $K(\theta)$ konjugierter Elemente von D wie folgt zugeordnet werden: Ist $\gamma: [0,1] \rightarrow M$ ein zu θ gehöriger Weg, $\bar{\gamma}: [0,1] \rightarrow H$ ein Überlagerungsweg von γ und $T \in D$ diejenige Decktransformation, für welche $T(\bar{\gamma}(0)) = \bar{\gamma}(1)$ gilt, so werde $K(\theta) = \{STS^{-1} / S \in D\}$ gesetzt. Man erkennt aus 3.6 leicht,

dass erstens $\mathcal{K}(\theta)$ dadurch wohldefiniert ist, und zweitens die Zuordnung $\theta \mapsto \mathcal{K}(\theta)$ eine bijektive Abbildung der Menge aller freien Homotopieklassen von M auf die Menge aller Klassen konjugierter Elemente von D liefert. Dabei gilt offenbar:

(III) $\mathcal{K}(\theta^m) = (\mathcal{K}(\theta))^m$ für jede freie Homotopieklasse θ auf M und alle ganzen m .

Hieraus folgt mit (I):

(IV) Genau dann ist eine freie Homotopieklasse θ primitiv, wenn $\mathcal{K}(\theta)$ eine primitive Klasse von D ist; jede freie Homotopieklasse $\theta \neq \sigma$ besitzt genau eine Darstellung $\theta = \pi^m$, in der π eine primitive freie Homotopieklasse und m eine natürliche Zahl ist. Dabei gilt $m = \nu(\theta) = \nu(T)$ für alle $T \in \mathcal{K}(\theta)$.

Damit ist auch Lemma 2 von §1 bewiesen.

Aus der Tatsache, dass die Überlagerungsabbildung $\Psi: H \rightarrow M$ längentreu ist, ergibt sich ohne weiteres:

(V) $\ell(\theta) = \ell(\mathcal{K}(\theta))$ für jede freie Homotopieklasse θ auf M ; das heisst $\ell(\theta) = \ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{K}(\theta)$.

Wegen (III) und (II) schliessen wir hieraus endlich:

(VI) Für jede freie Homotopieklasse θ auf M und alle ganzen m gilt $\ell(\theta^m) = |m| \ell(\theta)$.

Wir beweisen schliesslich Lemma 1 von §1. Es sei also $\theta \neq \sigma$ eine freie Homotopieklasse auf M , μ_1 und μ_2 seien differenzierbar geschlossene Geodätische von θ ; das sind also Geodätische der Periode 1 auf M , deren Restriktionen auf $[0,1]$ zu θ gehören. Ist dann T irgendein Element von $\mathcal{K}(\theta)$, so gibt es auf H zwei Geodätische γ_1 und γ_2 , welche μ_1 bzw. μ_2 überlagern ($\Psi \circ \gamma_i = \mu_i$), und für die $T(\gamma_i(t)) = \gamma_i(t+1)$ gilt ($i=1,2$). Wegen $\theta \neq \sigma$ ist $\mathcal{K}(\theta) \neq \{\text{id}\}$, also T eine Translation von H . Somit folgt aus Lemma 2 $\gamma_2(t) = \gamma_1(t+b)$, und hieraus $\mu_2(t) = \mu_1(t+b)$ für ein festes b und alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist dieses Lemma bewiesen.

3.10. Unter einem Fundamentalbereich der Gruppe D verstehen wir eine Lebesgue-messbare Teilmenge $B \subset H$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad \bigcup_{T \in D} T(B) = H$$

(2) Für verschiedene Elemente T_1, T_2 von D ist $T_1(B) \cap T_2(B)$ eine Menge vom Mass Null.

Unter den gegebenen Voraussetzungen besitzt D stets einen kompakten Fundamentalbereich, einen solchen stellt zum Beispiel bei beliebig vorgegebenem $q \in H$ der sogenannte Normalbereich $B_q := \{p \in H / g(p, q) \leq \inf_{T \in D} g(p, T(q))\}$ mit Zentrum q dar. Zur Eigenschaft (1) und der Kompaktheit von B_q vergleiche man etwa [9], p.233; (2) sieht man so: Es ist $T_1(B_q) \cap T_2(B_q)$ enthalten in $\{p \in H / g(p, T_1(q)) = g(p, T_2(q))\}$, und diese Menge ist für $T_1 \neq T_2$ eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von H , also eine Menge vom Mass Null.

3.11. Verpflanzt man eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Ueberlagerungsabbildung $\Psi: H \rightarrow M$ auf H , so erhält man eine bezüglich D automorphe Funktion $f^* = f \circ \Psi$ auf H ($f^* \circ T = f^* \quad \forall T \in D$). Durch die Zuordnung $f \mapsto f^*$ wird der Vektorraum $C^k(M)$ für jedes $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ isomorph auf den Unterraum der bezüglich D automorphen Funktionen von $C^k(H)$ abgebildet. Ist B ein Fundamentalbereich von D , so gilt

$$(1) \quad \int_M f \, dV_M = \int_B f^* \, dV_H \quad \text{für alle } f \in C^0(M).$$

Aus 2.2 folgt:

$$(2) \quad (\Delta^M f)^* = \Delta^H f^* \quad \text{für alle } f \in C^2(M).$$

§4. Hilfssätze über den n-dimensionalen hyperbolischen Raum

4.1. Wir betrachten eine n-dimensionale, einfach zusammenhängende und vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit H mit überall konstanter Schnittkrümmung -1 . H tritt als universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit bei n-dimensionalen hyperbolischen Raumformen der Schnittkrümmung -1 auf.

H ist bekanntlich isometrisch- diffeomorph zum Poincaré-Modell des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes; dies bedeutet, dass es auf H globale Koordinatensysteme $x=(x_1, \dots, x_n)$ der folgenden Art gibt:

$$(1) \quad x(H) = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n / u_n > 0\}$$

(2) Der Masstensor g von H hat die Gestalt

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2} \quad (i, j=1, \dots, n)$$

Wir nennen jedes solche Koordinatensystem ein Poincarésches Koordinatensystem auf H.

4.2. Es sei $(x_1, \dots, x_n)$ ein Poincarésches Koordinatensystem auf H. Dann lauten die zugehörigen Komponenten des Levi-Civita Zusammenhangs von H (d.h. die Christoffel-Symbole zweiter Art):

$$(1) \quad \Gamma_{ij}^k = x_n^{-1} (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{ik} \delta_{jn} - \delta_{jk} \delta_{in}) \quad (i, j, k=1, \dots, n)$$

Für die Beltramischen Differentialoperatoren ergibt sich aus 4.1.(2) und 2.1:

$$(2) \quad \Delta^H f = -x_n^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + (n-2) x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (f \in C^2(H)),$$

$$(3) \quad \nabla^H f = x_n^2 \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|^2 \quad (f \in C^1(H)).$$

Für die Distanz $g(p, q)$ zweier Punkte p, q von H gilt

$$(4) \quad \cosh g(p, q) = 1 + \frac{1}{2} x_n^{-1}(p) x_n^{-1}(q) \sum_{j=1}^n (x_j(p) - x_j(q))^2.$$

4.3. Im folgenden geht es zunächst darum, eine gegebene Translation von H mittels eines geeigneten Poincaréschen Koordinatensystem in einfacher Weise darzustellen. Wir verwenden dazu folgende wohlbekannte Tatsache: Sind zwei Punkte p, q von H und eine lineare Isometrie

$\iota: H_p \rightarrow H_q$ gegeben, so gibt es genau eine Isometrie $S \in I(H)$ mit $S(p) = q$ und $(S_*)_p = \iota$. (Es ist dies die Abbildung $S = \exp_q \circ (\exp_p)^{-1}$).

4.4.

Lemma 1

Vor: $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. $(x_1, \dots, x_n)$ sei ein Poincarésches Koordinatensystem auf H .

Beh:

(a) Die durch $x_1(\mu(t)) = \dots = x_{n-1}(\mu(t)) = 0$, $x_n(\mu(t)) = e^{ct}$ ($t \in \mathbb{R}$) gegebene Kurve $\mu: \mathbb{R} \rightarrow H$ ist eine Geodätische von H mit $\|\dot{\mu}\| = |c|$.

(b) Die Vektorfelder $Y_1, \dots, Y_n$ längs μ , definiert durch

$$Y_j(t) = x_n(\mu(t)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mu(t) \quad (j=1, \dots, n; t \in \mathbb{R}), \text{ sind längs } \mu \text{ parallel und orthonormal } (g(Y_j(t), Y_k(t)) = \delta_{jk}).$$

(c) Falls $U \in I(H)$ und $U(\mu(t)) = \mu(t+1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$x_i \circ U = e^c \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} x_k \quad (i=1, \dots, n-1), \quad x_n \circ U = e^c x_n, \text{ wobei die Matrix } (\alpha_{ik}) \text{ orthogonal ist.}$$

Beweis (a) und (b): Man stellt die längs μ differenzierbaren Vektorfelder $Y = \dot{\mu}$ bzw. $Y = Y_j$ in der Form $Y = \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial}{\partial x_k} \mu$ mit $f_k(t) = Y(t) x_k$ dar und bestätigt mit Hilfe von 4.2.(1) leicht, dass in beiden Fällen

$$\frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n f_i \frac{d(x_j \circ \mu)}{dt} \Gamma_{ij}^k \mu = 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

gilt. Daher sind $\dot{\mu}$ und Y_j ($j=1, \dots, n$) längs μ parallel, woraus sich zusammen mit 4.1.(2) die Behauptungen (a) und (b) ergeben.

Beweis (c): Wegen 4.1.(2) bilden die Tangentialvektoren $A_i(p) := x_n(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \in H_p$, $i=1, \dots, n$, für jedes $p \in H$ eine Orthonormalbasis von H_p . Setzen wir $\mu(0) = p_0$, so ist $\mu(1) = U(p_0)$ und die Abbildung $(U_*)_{p_0}: H_{p_0} \rightarrow H_{U(p_0)}$ eine lineare Isometrie mit

$$(1) \quad U_*(\dot{\mu}(0)) = \dot{\mu}(1).$$

Also hat man

$$(2) \quad U_*(A_j(p_0)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} A_i(U(p_0)) \quad (j=1, \dots, n)$$

mit einer orthogonalen $n \times n$ -Matrix (α_{ij}) . Aus $\dot{\mu}(0) = c A_n(p_0)$, $\dot{\mu}(1) = c A_n(U(p_0))$ und (1) folgt wegen $c \neq 0$ zudem $U_*(A_n(p_0)) = A_n(U(p_0))$, und hieraus

$$(3) \quad \alpha_{kn} = \alpha_{nk} = \delta_{nk} \quad (k=1, \dots, n).$$

Wir definieren nun eine Abbildung $V: H \rightarrow H$ durch

$$(4) \quad x_i \circ V = e^C \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k \quad (i=1, \dots, n).$$

Offenbar ist V ein Diffeomorphismus von H auf sich, und es gilt $V(\mu(t)) = \mu(t+1)$. Sei nun $p \in H$. Aus (4) folgt

$$V_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = e^C \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p V(p) \quad (j=1, \dots, n)$$

und hieraus ergibt sich wegen $x_n(V(p)) = e^C x_n(p)$:

$$(5) \quad V_*(A_j(p)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} A_i(V(p)) \quad (j=1, \dots, n)$$

Dies zeigt, dass für jedes $p \in H$ die Abbildung $(V_*)_p: H_p \rightarrow H_{V(p)}$ eine lineare Isometrie ist. Als längentreuer Diffeomorphismus gehört deshalb V zu $I(H)$, und wegen $U(p_0) = \mu(1) = V(p_0)$ folgt aus (2) und (5): $U_*(A_j(p_0)) = V_*(A_j(p_0))$, $j=1, \dots, n$; also $(U_*)_{p_0} = (V_*)_{p_0}$. Dies ist nach 4.3 nur für $U=V$ möglich. Aus (3) und (4) ergibt sich jetzt die Beh.(c).

Lemma 2

Zu jeder Translation $T \in I(H)$ gibt es ein Poincarésches Koordinatensystem $(x_1, \dots, x_n)$ derart, dass

$$x_i \circ T = e^{\ell(T)} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} x_k \quad (i=1, \dots, n-1), \quad x_n \circ T = e^{\ell(T)} x_n$$

mit einer orthogonalen Matrix (α_{ik}) gilt.

Beweis: Es gibt eine nicht konstante Geodätische $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$ derart, dass $T(\gamma(t)) = \gamma(t+1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach 3.4.(2) ist $\|\dot{\gamma}\| = \ell(T) > 0$. Sei $(y_1, \dots, y_n)$ irgendein Poincarésches Koordinatensystem auf H und $\mu: \mathbb{R} \rightarrow H$ die durch $y_1(\mu(t)) = \dots = y_{n-1}(\mu(t)) = 0$, $y_n(\mu(t)) = e^{\ell(T)t}$ gegebene Geodätische. Dann ist $\|\dot{\mu}\| = \ell(T)$ nach Lemma 1(a). Wegen $\|\dot{\gamma}\| = \|\dot{\mu}\|$ gibt es eine lineare Isometrie $\iota: H_{\gamma(0)} \rightarrow H_{\mu(0)}$ mit $\iota(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\mu}(0)$ und dazu nach 4.3 eine Isometrie $S \in I(H)$ mit $(S_*)_{\gamma(0)} = \iota$, also $S(\gamma(0)) = \mu(0)$, $S_*(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\mu}(0)$. Für die Geodätische $\nu := S \circ \gamma$ gilt dann $\nu(0) = \mu(0)$, $\dot{\nu}(0) = S_*(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\mu}(0)$, und hieraus folgt $\nu = \mu$, also $\mu = S \circ \gamma$. Setzen wir nun $U = STS^{-1}$, so ist $U \in I(H)$ und $U(\mu(t)) = \mu(t+1)$. Nach Lemma 1(c) gilt

daher für eine geeignete orthogonale Matrix (α_{ik}) :

$$y_i \circ U = e^{\ell(T)} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} y_k \quad (i=1, \dots, n-1), \quad y_n \circ U = e^{\ell(T)} y_n.$$

Das durch $x_i := y_i \circ S$ ($i=1, \dots, n$) definierte Poincarésche Koordinatensystem hat dann offenbar die verlangten Eigenschaften.

4.5. Wir benötigen einige Angaben über geodätische Polarkoordinaten auf H : Wir wählen einen Punkt $q \in H$ und eine lineare Isometrie $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow H_q$. Dann ist $\exp_q \circ \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ ein Diffeomorphismus und $y := (\exp_q \circ \varphi)^{-1}: H \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein normales Koordinatensystem mit Zentrum q von H . Aus 3.2.(3) folgt

$$g^2(p, q) = \sum_{i=1}^n y_i^2(p) \quad \forall p \in H.$$

Bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^+$ das offene Intervall $(0, \infty)$ von $\mathbb{R}$ und mit S^{n-1} die $(n-1)$ -Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$ (aufgefasst als Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$), so haben wir demnach die differenzierbaren Abbildungen

$$\begin{aligned} g: H - \{q\} &\rightarrow \mathbb{R}^+, & g(p) &= g(p, q), \\ \xi: H - \{q\} &\rightarrow S^{n-1}, & \xi(p) &= \frac{y(p)}{g(p)}, \end{aligned}$$

und den Diffeomorphismus

$$\mathcal{V}: H - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}, \quad \mathcal{V}(p) = (g(p), \xi(p)).$$

($\mathcal{V}^{-1}$ ist die Abbildung $(r, u) \mapsto y^{-1}(ru)$, $(r, u) \in \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$). Man nennt $(g(p), \xi(p))$ geodätische Polarkoordinaten von $p \in H - \{q\}$.

Der Masstensor g von H nimmt nun auf der Untermannigfaltigkeit $H - \{q\}$ die Gestalt

$$g = dg \otimes dg + \sin^2 g \sum_{i=1}^n d\xi_i \otimes d\xi_i \quad (\xi_i = \frac{y_i}{g})$$

an. Dies folgt leicht aus der Tatsache, dass

$$g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \xi_i \xi_j + \frac{\sin^2 g}{g^2} (\delta_{ij} - \xi_i \xi_j)$$

die Komponenten von g bezüglich der Normalkoordinaten y sind (vgl. dazu etwa [3], p.183).

Sind daher $r, u_1, \dots, u_n$ die Koordinatenfunktionen der Inklusion $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so ist

$$(1) \quad g := dr \otimes dr + \sum_{i=1}^n du_i \otimes du_i$$

der natürliche Masstensor auf $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$, der $\mathfrak{g}$ zu einer Isometrie macht; $\sum du_i \otimes du_i$ ist gerade der mittels der Projektion $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ verpflanzte euklidische Masstensor von S^{n-1} .

Mit dem Satz von Fubini folgt hieraus, dass für jede über H integrierbare Funktion f gilt:

$$(2) \quad \int_H f \, dV_H = \int_{r \in \mathbb{R}^+} \left(\int_{u \in S^{n-1}} f \circ \mathfrak{g}^{-1}(r, u) \, du \right) \sin^{n-1} r \, dr$$

(du bezeichnet das euklidische Volumenelement auf S^{n-1}).

Existiert andererseits für eine über H messbare Funktion f das Doppelintegral

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{S^{n-1}} |f \circ \mathfrak{g}^{-1}(r, u)| \, du \right) \sin^{n-1} r \, dr,$$

so ist f über H integrierbar.

Für das Volumen der Kugel $K[q, t] = \{p \in H / g(p, q) \leq t\}$ mit dem Mittelpunkt $q \in H$ und dem Radius $t \geq 0$ ergibt sich aus (2) die Formel

$$(3) \quad \text{Vol } K[q, t] = \int_{S^{n-1}} du \int_{r=0}^t \sin^{n-1} r \, dr = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^t \sin^{n-1} r \, dr$$

Auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit $N = \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ mit dem Masstensor (1) haben die Beltramischen Differentialoperatoren gemäss 2.1 die Gestalt

$$(4) \quad \begin{aligned} \nabla^N h &= \left| \frac{\partial h}{\partial r} \right|^2 + \sin^{-2} r \, \nabla^{S^{n-1}} h \quad (h \in C^1(N)), \\ \Delta^N h &= - \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + (n-1) \cot g r \, \frac{\partial h}{\partial r} + \sin^{-2} r \, \Delta^{S^{n-1}} h \quad (h \in C^2(N)). \end{aligned}$$

Weil $\mathfrak{g}^{-1}: N \rightarrow H - \{q\}$ eine Isometrie ist, folgt aus 2.2, wenn $h = f \circ \mathfrak{g}^{-1}$ gesetzt wird:

$$(5) \quad \begin{aligned} (\nabla^H f)(p) &= (\nabla^N h)(\mathfrak{g}(p)) \quad \forall p \in H - \{q\}, \forall f \in C^1(H), \\ (\Delta^H f)(p) &= (\Delta^N h)(\mathfrak{g}(p)) \quad \forall p \in H - \{q\}, \forall f \in C^2(H). \end{aligned}$$

4.6. Für fest gewählte $T \in I(H)$, $s \in \mathbb{C}$ und $q \in H$ ist $\cos^{-s} g(T(p), q)$ wegen 4.2.(4) und der Differenzierbarkeit von T eine C^∞ -Funktion von p auf H . Wir stellen einige Eigenschaften solcher Funktionen zusammen, die in den folgenden Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen.

Dabei halten wir uns an folgende Bezeichnungsweise: Für eine komplexwertige Funktion f auf $H \times H$ definieren wir $\Delta_p^H f(p, q)$ als Wert der Funktion $\Delta_p^H f_q$ an der Stelle p , falls $f_q := f(\cdot, q) \in C^2(H)$. Sinngemäss wird mit anderen Differentialoperatoren verfahren.

Lemma 3

Vor: $T \in I(H)$, $s \in \mathbb{C}$, $\sigma = \Re(s)$. $(x_1, \dots, x_n)$ sei ein Poincarésches Koordinatensystem auf H .

Beh: Für alle $p, q \in H$ gilt:

- (1) $\Delta_p^H \cos^{-s} g(T(p), q) = -s(s-n+1) \cos^{-s} g(T(p), q) + s(s+1) \cos^{-(s+2)} g(T(p), q)$
- (2) $\left| \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \cos^{-s} g(T(p), q) \right| \leq \frac{|s|}{x_n(p)} \cos^{-\sigma} g(T(p), q) \quad (i=1, \dots, n)$
- (3) $\left| \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p \cos^{-s} g(T(p), q) \right| \leq \frac{|s|(|s|+5)}{x_n^2(p)} \cos^{-\sigma} g(T(p), q) \quad (i, j=1, \dots, n)$

Beweis: Wegen $g(T(p), q) = g(p, T^{-1}(q))$ genügt es, die Behauptung für den Fall $T = \text{id}$ zu beweisen.

Wir halten $q \in H$ fest und führen gemäss 4.5 in $H - \{q\}$ geodätische Polarkoordinaten mit dem zugehörigen Diffeomorphismus $\mathfrak{P}: H - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ ein. Mit $f_q(p) := \cos^{-s} g(p, q)$, $h := f_q \circ \mathfrak{P}^{-1}$ erhalten wir aus 4.5.(5)

$$\Delta_p^H \cos^{-s} g(p, q) = (\Delta_p^H f_q)(p) = (\Delta^N h)(\mathfrak{P}(p)).$$

Andererseits ist $h = \cos^{-s} r$, also nach 4.5.(4):

$$\Delta^N h = - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + (n-1) \text{Ctgr} \frac{h}{r} \right) = -s(s-n+1) \cos^{-s} r + s(s+1) \cos^{-(s+2)} r.$$

Daher gilt für alle $p \in H - \{q\}$:

$$\Delta_p^H \cos^{-s} g(p, q) = -s(s-n+1) \cos^{-s} g(p, q) + s(s+1) \cos^{-(s+2)} g(p, q).$$

Da aber beide Seiten auf ganz H stetige Funktionen von p sind, gilt dies auch noch für $p=q$. Dies beweist (1).

Ebenso erhält man $\nabla_p^H \cos^{-s} g(p, q) = |s \cos^{-(s+1)} g(p, q) \text{Sing}(p, q)|^2$, also $\nabla_p^H \cos^{-s} g(p, q) \leq |s|^2 \cos^{-2\sigma} g(p, q)$. Somit folgt aus 4.2.(3)

$$(4) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \cos^{-s} g(p, q) \right| \leq \frac{1}{x_n(p)} \sqrt{\nabla_p^H \cos^{-s} g(p, q)} \leq \frac{|s|}{x_n(p)} \cos^{-\sigma} g(p, q).$$

Dies beweist die Beh.(2).

Zum Beweis von (3) wählen wir $f_q(p) = \cos g(p, q)$. Es ist

$$(5) \quad \frac{\partial^2 (f_q^{-s})}{\partial x_i \partial x_j} = s(s+1) f_q^{-s-2} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \frac{\partial f_q}{\partial x_j} - s f_q^{-s-1} \frac{\partial^2 f_q}{\partial x_i \partial x_j}$$

Setzt man in (4) $s=-1$, so folgt

$$(6) \quad \left| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right| \leq \frac{f_q}{x_n} \quad (i=1, \dots, n)$$

Zur Abschätzung von $\frac{\partial^2 f_q}{\partial x_i \partial x_j}$ gehen wir von den Relationen

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f_q}{\partial x_i \partial x_j} &= \delta_{ij} \frac{1}{x_n(q) x_n} \quad (i, j=1, \dots, n-1) \\ \frac{\partial^2 f_q}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{1}{x_n} \frac{f_q}{x_i} \quad (i=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f_q}{\partial x_n^2} = \frac{1}{x_n(q) x_n} - \frac{2}{x_n} \frac{\partial f_q}{\partial x_n}$$

aus, die leicht aus 4.2.(4) hergeleitet werden können. Aus

$$\frac{x_n(p)}{x_n(q)} \leq \frac{x_n(p)}{x_n(q)} + \frac{x_n(q)}{x_n(p)} = 2 + \frac{(x_n(p) - x_n(q))^2}{x_n(p)x_n(q)} \leq 2 \cos g(p, q)$$

erhalten wir ferner die Ungleichung

$$(8) \quad \frac{1}{x_n(q) x_n} \leq \frac{2}{x_n^2} f_q.$$

Somit ergibt sich aus (6), (7) und (8):

$$\frac{\partial^2 f_q}{\partial x_i \partial x_j} \leq \frac{4}{x_n^2} f_q \quad (i, j=1, \dots, n),$$

und hieraus folgt mit (5) und (6):

$$\frac{\partial^2 (f_q^{-s})}{\partial x_i \partial x_j} \leq \frac{|s|}{x_n^2} (|s|+1) f_q^{-s} \leq \frac{|s|(|s|+5)}{x_n^2} f_q^{-s}.$$

Dies entspricht der Behauptung (3) mit $T=id$, q.e.d.

§5. Die Funktion $G(p, q, s)$

5.1. Wir gehen nun daran, die von H. Huber in [6] für orientierbare zweidimensionale hyperbolische Raumformen entwickelte Methode auf (nicht mehr notwendigerweise orientierbare) hyperbolische Raumformen beliebiger Dimension zu übertragen. Dabei treffen wir folgende

Voraussetzungen: (durchwegs gültig für §5-§8)

M sei eine n -dimensionale hyperbolische Raumform der Schnittkrümmung -1 , H universelle Ueberlagerungsmannigfaltigkeit von M , $\Psi: H \rightarrow M$ differenzierbare längentreue Ueberlagerungsabbildung mit zugehöriger Deckgruppe D .

Der Ueberlagerung $\Psi: H \rightarrow M$ wird nun die Dirichlet-Reihe

$$(1) \quad G^*(p, q, s) := \sum_{T \in D} \cos^{-s} \vartheta(T(p), q) \quad (p, q \in H, s \in \mathbb{C})$$

zugeordnet. Wir werden sehen, dass sie für $\Re s > n-1$ absolut konvergiert und eine Funktion mit folgenden Eigenschaften darstellt (vgl. Satz 1 in [6]):

Satz 1

- (a) G^* ist stetig auf $H \times H \times \{s \in \mathbb{C} / \Re s > n-1\}$.
- (b) $G^*(T(p), q, s) = G^*(p, T(q), s) = G^*(p, q, s)$ für alle $T \in D$ und alle $(p, q, s) \in H \times H \times \{s / \Re s > n-1\}$
- (c) Bei festen q und s ($q \in H, \Re s > n-1$) ist $G^*(p, q, s)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von p auf H und genügt dort der Funktionalgleichung

$$\Delta_p^H G^*(p, q, s) = -s(s-n+1)G^*(p, q, s) + s(s+1)G^*(p, q, s+2).$$

Aufgrund von (b) gibt es genau eine auf $M \times M \times \{s / \Re s > n-1\}$ definierte Funktion G mit

$$(2) \quad G(\Psi(p), \Psi(q), s) = G^*(p, q, s) \text{ für alle } (p, q, s) \in H \times H \times \{s / \Re s > n-1\}.$$

Man erkennt übrigens leicht, dass G nicht von der Wahl der Ueberlagerung abhängt, mit deren Hilfe G^* definiert wurde. Aus Satz 1 und 3.11 ergibt sich unmittelbar der folgende Satz:

Satz 2

- (a) G ist stetig auf $M \times M \times \{s/\Re s > n-1\}$.
 (b) Bei festen q und s ($q \in M, \Re s > n-1$) ist $G(p, q, s)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von p auf M und genügt dort der Funktionalgleichung

$$\Delta_p^M G(p, q, s) = -s(s-n+1)G(p, q, s) + s(s+1)G(p, q, s+2).$$

Bevor wir Satz 1 beweisen, geben wir einen summarischen Ueberblick über das weitere Vorgehen, das demjenigen in [6] entspricht: Für $\Re s > n-1$ existiert das Integral

$$I(s) := \int_M G(p, p, s) \, dV_M(p),$$

weil der Integrand nach Satz 2(a) auf M stetig und M kompakt ist. Es definiert eine in der Halbebene $\Re s > n-1$ holomorphe Funktion I , die wir auf zwei verschiedene Arten berechnen werden.

Wir untersuchen einerseits die Fourierkoeffizienten der Funktion $G(\cdot, q, s)$ - q und s sind fest - bezüglich eines vollständigen Orthornormalsystems von Eigenfunktionen von Δ^M (§6). Daraus gewinnen wir in §7 für $I(s)$ eine Darstellung in Form einer Reihe, deren Glieder in ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen sind und sich explizit aus dem Eigenwertspektrum von M bestimmen lassen. I lässt sich dadurch sogar zu einer in ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzen.

Andererseits folgt aus (2) und 3.11.(1)

$$I(s) = \int_B G^*(p, p, s) \, dV_H(p)$$

(B bezeichnet einen Fundamentalbereich von D). In §8 werden wir das Integral rechts durch gliedweise Integration über B aus der Reihe (1) berechnen, und so für $I(s)$ eine Darstellung erhalten, bei der das geometrische Spektrum auftritt. Durch Vergleich der beiden Darstellungen erhält man einen Zusammenhang zwischen dem Eigenwertspektrum und dem geometrischen Spektrum von M .

5.2. Der Beweis von Satz 1 erfordert einige Vorbereitungen. Wir halten $p \in H$, $q \in H$ fest und betrachten für $t \geq 0$ die Menge D_t aller $T \in D$ mit $g(T(p), q) \leq t$. Da die Kugel $K[q, t] = \{p \in H / g(p, q) \leq t\}$ ein Kompaktum von H ist, folgt aus der Diskontinuität von D , dass $D_t = \{T \in D / T(p) \in K[q, t]\}$ eine endliche Menge ist. Wir geben eine von

p und q unabhängige Abschätzung der Anzahl ihrer Elemente:

Lemma 1

Es sei $N(p, q, t)$ die Anzahl der Elemente der Menge $\{T \in D / g(T(p), q) \leq t\}$. Dann gibt es eine positive, nur von M abhängige Konstante C_1 derart, dass für alle $p, q \in H$ und $t \geq 0$

$$N(p, q, t) \leq C_1 \cos^{n-1} t.$$

Beweis: Da M kompakt ist, ist das Infimum ℓ_0 der Längen aller nicht nullhomotopen, geschlossenen Kurven auf M positiv. Andererseits ist $\ell_0 = \inf \{g(T(p), p) / p \in H, T \in D - \{id\}\}$. Ordnen wir nun jedem $T \in D$ die Kugel $K[T(p), \ell_0/2]$ zu, so gilt:

$$\text{Vol}(K[T_1(p), \ell_0/2] \cap K[T_2(p), \ell_0/2]) = 0 \quad \text{für } T_1 \neq T_2,$$

$$\text{Vol } K[T(p), \ell_0/2] = \text{Vol } K[p, \ell_0/2] \quad \text{für alle } T \in D,$$

$$K[T(p), \ell_0/2] \subseteq K[q, t + \ell_0/2] \quad \text{für alle } T \in D \text{ mit } g(T(p), q) \leq t.$$

Man erhält daher

$$\text{Vol} \bigcup_{T \in D, g(T(p), q) \leq t} K[T(p), \ell_0/2] = N(p, q, t) \text{Vol } K[p, \ell_0/2] \leq \text{Vol } K[q, t + \ell_0/2]$$

Wegen $\ell_0 > 0$ und 4.5.(3) ergibt sich hieraus die Abschätzung

$$N(p, q, t) \leq \left(\int_0^{t+\ell_0/2} \sin^{n-1} r \, dr \right) \left(\int_0^{\ell_0/2} \sin^{n-1} r \, dr \right)^{-1}.$$

Der erste Faktor rechts ist kleiner gleich $\frac{e^{(n-1)\ell_0/2}}{n-1} \cos^{n-1} t$. Man kann daher

$$C_1 = \frac{e^{(n-1)\ell_0/2}}{n-1} \left(\int_0^{\ell_0/2} \sin^{n-1} r \, dr \right)^{-1}$$

wählen.

Lemma 2

Für alle $p, q \in H$ und alle reellen $\sigma > n-1$ konvergiert die Reihe

$\sum_{T \in D} \cos^{-\sigma} g(T(p), q)$, und es gilt

$$\sum_{T \in D} \cos^{-\sigma} g(T(p), q) \leq \frac{C_1 \sigma}{\sigma - n + 1}$$

mit der Konstanten C_1 aus Lemma 1.

Beweis: Wir halten $p, q \in H$ fest und setzen für $t \geq 0$

$$f(t) = \sum_{T \in D, g(T(p), q) \leq t} \cos^{-\sigma} g(T(p), q), \quad N(t) = N(p, q, t).$$

Man beachte, dass die $f(t)$ definierende Summe aus $N(t)$ positiven Gliedern besteht. Es genügt daher, $f(t) \leq C_1 \sigma (\sigma - n + 1)^{-1}$ für alle $t \geq 0$ nachzuweisen. Aus der Darstellung

$$f(t) = \int_0^t \cos^{-\sigma} \tau \, dN(\tau) + N(0)$$

ergibt sich durch partielle Integration

$$f(t) = \cos^{-\sigma} t N(t) + \int_0^t \cos^{-\sigma-1} \sin \tau N(\tau) \, d\tau.$$

Hieraus folgt mit Lemma 1

$$f(t) \leq C_1 \cos^{-\sigma+n-1} t + C_1 \sigma \int_0^t \cos^{-\sigma+n-2} \sin \tau \, d\tau.$$

Für $\sigma \neq n-1$ ist die rechte Seite gleich

$$C_1 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma - n + 1} \right) \cos^{-\sigma+n-1} t + C_1 \frac{\sigma}{\sigma - n + 1},$$

und für $\sigma > n-1$ folgt hieraus $f(t) \leq C_1 \sigma (\sigma - n + 1)^{-1}$, q.e.d.

Lemma 3

Es sei $\{T_k / k \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige Anordnung der Elemente von D und $(x_1, \dots, x_n)$ ein Poincarésches Koordinatensystem auf H . Dann konvergieren die Reihen

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \cos^{-s} g(T_k(p), q)$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \cos^{-s} g(T_k(p), q) \quad (i=1, \dots, n),$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p \cos^{-s} g(T_k(p), q) \quad (i, j=1, \dots, n)$$

absolut lokal gleichmäßig in (p, q, s) auf $H \times H \times \{s / \Re s > n-1\}$.

Beweis: Wegen Lemma 3 in §4, Beh.(2) und (3), genügt es zu zeigen, dass die Reihe (1) auf jedem Kompaktum A von $H \times H \times \{s / \Re s > n-1\}$ absolut gleichmäßig konvergiert. Wir wählen dazu p_0 in H und reelle Zahlen

$t > 0$ und $\sigma_0 > n-1$ derart, dass $g(p_0, p) \leq t$, $g(p_0, q) \leq t$ und $\Re s \geq \sigma_0$ für alle $(p, q, s) \in A$. Aus

$g(T_k(p_0), p_0) \leq g(T_k(p_0), T_k(p)) + g(T_k(p), q) + g(q, p_0) \leq 2t + g(T_k(p), q)$
folgt

$$\cos^{-s} g(T_k(p), q) \leq e^{2t} \cos^{-\sigma_0} g(T_k(p_0), p_0)$$

für $(p, q, s) \in A, k \in \mathbb{N}$. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{(p, q, s) \in A} |\cos^{-s} g(T_k(p), q)|$$

hat daher die nach Lemma 2 konvergente Majorante

$$e^{2t\sigma_0} \sum_{k=1}^{\infty} \cos^{-\sigma_0} g(T_k(p_0), p_0).$$

Dies beweist Lemma 3.

5.3. Beweis von Satz 1. Da die Glieder der in Lemma 3 auftretenden Reihen stetige Funktionen auf $H \times H \times \{s/\Re s > n-1\}$ sind, folgt aus Lemma 3:

$$(1) \quad G^*(p, q, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos^{-s} g(T_k(p), q)$$

ist eine stetige Funktion von (p, q, s) auf $H \times H \times \{s/\Re s > n-1\}$ und besitzt dort stetige erste und zweite partielle Ableitungen nach Poincaréschen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ von p . Für $i, j=1, \dots, n$ gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p G^*(p, q, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \cos^{-s} g(T_k(p), q),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)_p G^*(p, q, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)_p \cos^{-s} g(T_k(p), q).$$

Mit 4.2.(2) folgt hieraus insbesondere

$$(2) \quad \Delta_p^H G^*(p, q, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_p^H \cos^{-s} g(T_k(p), q).$$

Gemäss Lemma 3 in §4 ist

$$\Delta_p^H \cos^{-s} g(T_k(p), q) = -s(s-n+1) \cos^{-s} g(T_k(p), q) + s(s+1) \cos^{-s-2} g(T_k(p), q),$$

sodass sich aus (1) und (2)

$$\Delta_p^H G^*(p, q, s) = -s(s-n+1) G^*(p, q, s) + s(s+1) G^*(p, q, s+2)$$

ergibt. Damit sind die Behauptungen (a) und (c) in Satz 1 bewiesen.

Beweis von (b): Sei $T \in D$. Ersetzt man in (1) p durch $T(p)$, so bedeutet dies in der Reihe rechts wegen $\{T_k T / k \in \mathbb{N}\} = D$ lediglich eine Permutation der Glieder, und die Summe bleibt dabei wegen der absoluten Konvergenz invariant. Daher ist $G^*(p, q, s) = G^*(T(p), q, s)$. Ebenso folgt $G^*(p, q, s) = G^*(p, T(q), s)$ aus $g(T_k(p), T(q)) = g(T^{-1}T_k(p), q)$.

§6. Die Fourierkoeffizienten von $G(\cdot, q, s)$

6.1. Bei festen q und s ($q \in M, \Re s > n-1$) ist $G(\cdot, q, s)$ nach Satz 2(b) eine Funktion aus $C^2(M)$. Wir untersuchen ihre Fourierkoeffizienten bezüglich eines vollständigen Orthonormalsystems von Eigenfunktionen von Δ^M . Aus Lemma 1(a) in §2 erhalten wir sofort

Lemma 1

Vor: $\{\lambda_j / j=0, 1, 2, \dots\}$ sei die Spektralfolge von Δ^M und $\{\varphi_j / j \geq 0\}$ ein zugehöriges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen;

$$c_j(s, q) := \langle G(\cdot, q, s), \varphi_j \rangle = \int_M G(p, q, s) \overline{\varphi_j(p)} dV_M(p) \quad \text{für } q \in M, \Re s > n-1.$$

Beh: Für alle $q \in M$ und $\Re s > n-1$ gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_M \left| G(p, q, s) - \sum_{j=1}^m c_j(s, q) \varphi_j(p) \right|^2 dV_M(p) = 0.$$

6.2. Wir bestimmen jetzt die Fourierkoeffizienten $c_j(s, q)$. Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: Man setze für $\lambda \geq 0$

$$(1) \quad \begin{aligned} s_1(\lambda) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(n-1 + \sqrt{(n-1)^2 - 4\lambda}), & \text{falls } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}(n-1)^2 \\ \frac{1}{2}(n-1 + i\sqrt{4\lambda - (n-1)^2}), & \text{falls } \lambda > \frac{1}{4}(n-1)^2 \end{cases} \\ s_2(\lambda) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(n-1 - \sqrt{(n-1)^2 - 4\lambda}), & \text{falls } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}(n-1)^2 \\ \frac{1}{2}(n-1 - i\sqrt{4\lambda - (n-1)^2}), & \text{falls } \lambda > \frac{1}{4}(n-1)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Damit wird

$$(2) \quad s^2 - (n-1)s + \lambda = (s - s_1(\lambda))(s - s_2(\lambda)).$$

Ferner ordnen wir jedem $\lambda > 0$ die in der komplexen s -Ebene meromorphe Funktion F_λ ,

$$(3) \quad F_\lambda(s) := \pi^{\frac{1}{2}n} \frac{\Gamma\left(\frac{s - s_1(\lambda)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s - s_2(\lambda)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)},$$

zu. Die Pole dieser Funktion sind enthalten in der Menge $\{s_1(\lambda) - 2\ell, s_2(\lambda) - 2\ell / \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Wegen $\Re s_2(\lambda) \leq \Re s_1(\lambda) \leq n-1$ ist daher F_λ für alle $\lambda \geq 0$ eine in der Halbebene $\Re s > n-1$ holomorphe und nirgends verschwindende Funktion. Indem wir die Stirlingsche asymptotische Darstellung auf die vier in F_λ vorkommenden Gammafunktionen anwenden und noch (2) berücksichtigen, erhalten wir leicht

$$(4) \quad F_\lambda(\sigma) \sim \left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}} \quad \text{für } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Aus $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ folgt

$$(5) \quad F_\lambda(s+2) = \frac{s^2 - (n-1)s + \lambda}{s(s+1)} F_\lambda(s)$$

Die Bedeutung der Funktionen F_λ wird ersichtlich aus dem folgenden

Satz 3

Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 gilt für $j \geq 0$, $q \in M$, $\Re s > n-1$:

$$c_j(s, q) = F_{\lambda_j}(s) \overline{\psi_j(q)}.$$

Um Satz 3 zu beweisen, verwenden wir

Lemma 2

Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 gilt für alle $q \in M$, $j \geq 0$:

- (a) $c_j(s, q)$ ist holomorph in der Halbebene $\Re s > n-1$.
- (b) $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} c_j(s, q) = \overline{\psi_j(q)}.$
- (c) $c_j(s+2, q) = \frac{s^2 - (n-1)s + \lambda}{s(s+1)} c_j(s, q) \quad \text{für } \Re s > n-1.$

Wir beweisen Lemma 2 in 6.3 und zeigen vorher, wie Satz 2 daraus folgt: Dazu betrachten wir die Funktion $f_j(s) := c_j(s, q)(F_{\lambda_j}(s))^{-1}$.

Sie ist wegen Lemma 2(a) holomorph für $\Re s > n-1$. Aus (b) und (4) folgt aber $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} f_j(\sigma) = \overline{\psi_j(q)}$, während (c) und (5) $f_j(s+2) = f_j(s)$ liefern. Daher ist $f_j(s)$ in der Halbebene $\Re s > n-1$ konstant und besitzt den Wert $\overline{\psi_j(q)}$. Dies beweist Satz 3.

6.3. Beweis von Lemma 2. Aus der Funktionalgleichung in Satz 2(b) ergibt sich sofort

$$\langle \Delta^M G(\cdot, q, s), \varphi_j \rangle = -s(s-n+1)c_j(s, q) + s(s+1)c_j(s+2, q).$$

Andererseits ist Δ^M auf $C^2(M)$ selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$, also

$$\langle \Delta^M G(\cdot, q, s), \varphi_j \rangle = \langle G(\cdot, q, s), \Delta^M \varphi_j \rangle = \langle G(\cdot, q, s), \lambda_j \varphi_j \rangle = \lambda_j c_j(s, q)$$

und wir erhalten $(s^2 - (n-1)s + \lambda_j)c_j(s, q) = s(s+1)c_j(s, q)$. Dies beweist die Behauptung (c).

Die für den Beweis der Behauptungen (a) und (b) erforderlichen Rechnungen führen wir auf der Ueberlagerungsmannigfaltigkeit H durch.

Es sei

$$\psi := \overline{\varphi_j} \circ \Psi, \quad c(s, q) := c_j(s, \Psi(q)) \quad \text{für } q \in H, \operatorname{Re} s > n-1.$$

Wir haben zu zeigen, dass für alle $q \in H$ gilt:

(I) $c(s, q)$ ist holomorph in der Halbebene $\operatorname{Re} s > n-1$

$$(II) \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} c(\sigma, q) = \varphi(q).$$

Beweis: Nach 5.1.(2) und 3.11.(1) gilt für jeden Fundamentalbereich B von D

$$c(s, q) = \int_B G^*(p, q, s) \varphi(p) dV_H(p) \quad (q \in H, \operatorname{Re} s > n-1).$$

φ ist eine bezüglich D automorphe und beschränkte C^∞ -Funktion auf H .

Nun sei $\{T_k / k \in \mathbb{N}\}$ eine beliebige Anordnung der Elemente von D und B

ein kompakter Fundamentalbereich von D ; ein solcher ist nach 3.10

stets vorhanden. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^{-s} g(T_k(p), q) \varphi(p)$

für feste q und s nach Lemma 3 in §5 gleichmässig in p auf B gegen

$G^*(p, q, s) \varphi(p)$, und daher ist

$$c(s, q) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_B \cos^{-s} g(T_k(p), q) \varphi(p) dV_H(p).$$

Weil jedes T_k eine Isometrie und φ bezüglich D automorph ist, erhalten wir

$$(1) \quad c(s, q) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_k(B)} \cos^{-s} g(p, q) \varphi(p) dV_H(p).$$

Nun führen wir in $H - \{q\}$ gemäss 4.5 geodätische Polarkoordinaten mit

dem zugehörigen Diffeomorphismus $\vartheta: H - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ ein. Dann ist

$\varphi \circ \vartheta^{-1}$ eine auf $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ stetige und beschränkte Funktion, und deshalb

existiert für $\Re s > n-1$ das Integral

$$\int_{r \in \mathbb{R}^+} \left(\int_{u \in S^{n-1}} |\varphi \circ \vartheta^{-1}(r, u) \cos^{-s} r| du \right) \sin^{n-1} r dr.$$

Dies zeigt, dass die Funktion $\cos^{-s} g(p, q) \varphi(p)$ für $\Re s > n-1$ über H integrierbar ist, sodass also nach 4.5.(2)

$$\int_H \cos^{-s} g(p, q) \varphi(p) dV_H = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{S^{n-1}} \varphi \circ \vartheta^{-1}(r, u) du \right) \cos^{-s} r \sin^{n-1} r dr.$$

Andererseits ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k(B) = H$, und für $k \neq l$ ist $T_k(B) \cap T_l(B)$ eine Nullmenge; es folgt mit (1)

$$\int_H \cos^{-s} g(p, q) \varphi(p) dV_H(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_k(B)} \cos^{-s} g(p, q) \varphi(p) dV_H(p) = c(s, q).$$

Setzen wir schliesslich

$$\Phi(r) = \int_{S^{n-1}} \varphi \circ \vartheta^{-1}(r, u) du \quad \text{für } r > 0,$$

$$(2) \quad \Phi(0) = \varphi(q) \operatorname{Vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{(n/2)} \varphi(q) \quad \text{für } r=0,$$

so ist ersichtlich Φ eine auf $[0, \infty)$ stetige und beschränkte Funktion, also

$$c(s, q) = \int_0^{\infty} \Phi(r) \cos^{-s} r \sin^{n-1} r dr$$

eine in der Halbebene $\Re s > n-1$ holomorphe Funktion. Dies beweist (I).

Beweis von (II): Wir betrachten für reelle $\sigma > n-1$ das Integral

$$J(\sigma) := \int_0^{\infty} \cos^{-\sigma} r \sin^{n-1} r dr = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{\sigma-n+1}{2})}{2 \Gamma(\frac{\sigma+1}{2})}$$

Aus der Stirlingschen asymptotischen Darstellung für die Gammafunktion folgt

$$(3) \quad J(\sigma) \sim \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{n/2} \quad \text{für } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Nun ist offenbar

$$\frac{1}{J(\sigma)} c(\sigma, q) - \Phi(0) = \frac{1}{J(\sigma)} \int_0^{\infty} (\Phi(r) - \Phi(0)) \cos^{-\sigma} r \sin^{n-1} r dr.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da Φ auf $[0, \infty)$ stetig und beschränkt ist, gibt es positive

Zahlen δ_1 und δ_2 derart, dass $|\Phi(r) - \Phi(0)| < \varepsilon$ für $0 \leq r \leq \delta_1$ und $|\Phi(r) - \Phi(0)| \leq \delta_2$ für alle $r \geq 0$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{J(\sigma)} c(\sigma, q) - \Phi(0) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{J(\sigma)} \int_0^{\delta_1} \cos^{-\sigma} r \sin^{n-1} r \, dr + \frac{\delta_2}{J(\sigma)} \int_{\delta_1}^{\infty} \cos^{-\sigma} r \sin^{n-1} r \, dr \\ &\leq \varepsilon + \frac{\delta_2}{J(\sigma)} \int_{\delta_1}^{\infty} \cos^{-\sigma+n-2} r \sin r \, dr = \varepsilon + \frac{\delta_2}{J(\sigma)} \frac{\cos^{-\sigma+n-1} \delta_1}{\sigma-n+1} \end{aligned}$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ richtig ist und der letzte Term wegen (3) für $\sigma \rightarrow +\infty$ gegen Null konvergiert, erhalten wir

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{J(\sigma)} c(\sigma, q) - \Phi(0) \right| = 0.$$

Mit (2) und (3) ergibt sich hieraus die Behauptung (II) sofort.

§7. Die Funktion $I(s)$ und das Eigenwertspektrum

7.1. Wir untersuchen die beiden Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} F_{\lambda_j}(s) \varphi_j(p) \overline{\varphi_j(q)}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} F_{\lambda_j}(s),$$

deren Glieder in ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen von s sind. Die erste Reihe stimmt nach Satz 3 für $\Re s > n-1$ mit der Fourierreihe

$\sum_{j=0}^{\infty} c_j(s, q) \varphi_j(p)$ von $G(\cdot, q, s)$ überein. Das Konvergenzverhalten dieser Reihen beschreibt der folgende

Satz 4

Q sei ein Kompaktum in $\mathbb{C}$. Die natürliche Zahl $j_0(Q)$ werde so gewählt, dass F_{λ_j} für alle $j \geq j_0(Q)$ in Q holomorph ist. Dann gilt:

(a) Die Reihe

$$\sum_{j=j_0(Q)}^{\infty} F_{\lambda_j}(s) \varphi_j(p) \overline{\varphi_j(q)}, \quad (p, q, s) \in M \times M \times Q,$$

konvergiert gleichmäßig auf $M \times M \times Q$.

(b) Die Reihe

$$\sum_{j=j_0(Q)}^{\infty} F_{\lambda_j}(s), \quad s \in Q,$$

konvergiert gleichmäßig auf Q .

Man beachte: Aus $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = +\infty$ und der Definition der Größen $s_1(\lambda)$, $s_2(\lambda)$ in 6.2.(1) folgt $\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(s_1(\lambda_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} |\operatorname{Im}(s_2(\lambda_j))| = +\infty$.

Da die Pole von F_{λ_j} in der Menge $\{s_1(\lambda_j) - 2\ell, s_2(\lambda_j) - 2\ell / \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ liegen, gibt es zu jedem Kompaktum $Q \subset \mathbb{C}$ stets einen Index $j_0(Q)$ mit den verlangten Eigenschaften.

7.2. Den Beweis von Satz 4 verschieben wir auf die Abschnitte 7.4 und 7.5. Zunächst wollen wir die für uns wichtigen Folgerungen aus Satz 4 ziehen.

Da die Funktionen F_{λ_j} für alle $j \geq 0$ in der Halbebene $\Re s > n-1$ holomorph sind, folgt aus Satz 4(a) insbesondere: Für jedes feste s mit $\Re s > n-1$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} F_{\lambda_j}(s) \varphi_j(p) \overline{\varphi_j(q)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(s, q) \varphi_j(p)$ gleichmäßig in (p, q) auf $M \times M$. Sie stellt damit $G(p, q, s)$ dar, wie man aus Lemma 1 von §6 in bekannter Weise schliesst,

$$(1) \quad G(p, q, s) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{\lambda_j}(s) \varphi_j(p) \overline{\varphi_j(q)} \quad \forall (p, q, s) \in M \times M \times \{s / \Re s > n-1\}.$$

Setzen wir hierin $p=q$ und integrieren gliedweise über M , so ergibt sich wegen $\int_M |\varphi_j|^2 dV_M = \|\varphi_j\|_M^2 = 1$:

$$(2) \quad I(s) = \int_M G(p, p, s) dV_M(p) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{\lambda_j}(s) \quad \text{für } \Re s > n-1.$$

Die in (1) und (2) auftretenden Reihen stellen wegen Satz 4 offenbar in der ganzen s -Ebene meromorphe Funktionen dar, liefern also meromorphe Fortsetzungen der zunächst nur in der Halbebene $\Re s > n-1$ erklärten Funktionen $G(p, q, s)$ und $I(s)$. Mit der Fortsetzung von $G(p, q, s)$ durch (1) und den sich daraus ergebenden Resultaten befassen wir uns hier nicht weiter, wir verweisen in diesem Zusammenhang auf Satz 2 und 3 in [6] sowie auf die Arbeit [5] von O.Hermann. Wir nützen jetzt (2) und Satz 4(b) aus:

Satz 5

(a) Die Reihe

$$F(s) := \sum_{j=0}^{\infty} F_{\lambda_j}(s)$$

konvergiert absolut für alle $s \notin P := \{s_1(\lambda_j) - 2\ell, s_2(\lambda_j) - 2\ell / \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N}\}$ und stellt eine in der ganzen s -Ebene meromorphe Funktion dar, deren Pole in P enthalten sind. Der Hauptteil von F in einem Punkt $s_0 \in P$ ist gleich der Summe der Hauptteile der endlich vielen

in s_0 singulären Reihenglieder.

(b) Für $\Re s > n-1$ gilt

$$I(s) = \int_M G(p, p, s) dV_M(p) = \pi^{\frac{1}{2}n} \frac{\Gamma\left(\frac{s-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + F(s).$$

(c) Es gibt eine solche reelle Zahl $\sigma_0 < n-1$, dass F in der Halbebene $\Re s > \sigma_0$ holomorph ist.

Beweis: Da die Pole der in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion F_λ in $\{s_1(\lambda)-2\ell, s_2(\lambda)-2\ell/\ell \geq 0\}$ liegen, ergibt sich Satz 5(a) unmittelbar aus Satz 4(b).

Wegen $\lambda_0=0$ folgt aus 6.2.(1): $s_1(\lambda_0)=n-1$, $s_2(\lambda_0)=0$. Nach 6.2.(3) ist demnach

$$F_{\lambda_0}(s) = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)},$$

und die Behauptung (b) folgt mit (2).

Beweis (c): Wegen $\lambda_j \geq \lambda_1 > 0$ für $j \geq 1$ und 6.2.(1) gilt $\Re(s_2(\lambda_j)) \leq \Re(s_1(\lambda_j)) \leq \Re s_1(\lambda_1) < n-1$ für $j \geq 1$. Setzt man nun $\sigma_0 = \Re(s_1(\lambda_1))$, so enthält die Halbebene $\Re s > \sigma_0$ keine Punkte von P . Dies beweist (c).

7.3. Wir weisen noch auf den Zusammenhang hin, der zwischen dem in 1.1 definierten Eigenwertspektrum $d_M(\lambda)$ von M und den meromorphen Funktionen F bzw. I besteht. Es ist ja $d_M(\lambda)=0$, wenn λ nicht zur Spektralfolge von Δ^M gehört, andernfalls kommt λ in der Spektralfolge genau $d_M(\lambda)$ -mal vor. Aufgrund von Satz 5(a) gilt daher

$$(1) \quad F(s) = \sum_{\lambda > 0} d_M(\lambda) F_\lambda(s) \quad \text{für } s \notin P.$$

In der Definition von F_λ kommt als einzige von M abhängige Größe die Dimension n vor, die ihrerseits durch das Eigenwertspektrum von M eindeutig bestimmt ist. Durch das Eigenwertspektrum von M ist also $F(s)$, und damit auch $I(s)$ nach Satz 5(b) eindeutig bestimmt. Man kann zeigen, dass sich umgekehrt das Eigenwertspektrum von M aus der meromorphen Funktion F berechnen lässt. Für unsere Zwecke genügt jedoch das in §9 zu verwendende

Lemma 1

An der Stelle $s_1(\lambda^*)$, $\lambda^* > 0$, besitzt die Funktion F denselben Hauptteil wie die Funktion

$$\sum_{0 < \lambda \leq \lambda^*} d_M(\lambda) F_\lambda$$

Beweis: Man erkennt aus 6.2.(1) leicht, dass $s_1(\lambda^*)$ für $\lambda > \lambda^*$ nicht in der Menge $\{s_1(\lambda) - 2\ell, s_2(\lambda) - 2\ell / \ell \geq 0\}$ liegen kann. Daher ist $s_1(\lambda^*)$ für $\lambda > \lambda^*$ eine reguläre Stelle von F_λ , woraus sich mit Satz 5(a) die Behauptung sofort ergibt.

7.4. Die folgenden Lemmata 2 und 3 dienen dem Beweis von Satz 4.

Lemma 2

Es gibt eine nur von M abhängige Konstante C_2 derart, dass für alle $q \in M$ und alle s mit $\Re s \geq n$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |F_{\lambda_j}(s) \varphi_j(q)|^2 \leq C_2.$$

Beweis: Aus der Besselschen Ungleichung für das Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}$ und Satz 3 folgt für $\sigma = \Re s > n-1$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |F_{\lambda_j}(s) \varphi_j(q)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j(s, q)|^2 = \int_M |G(p, q, s)|^2 dV_M(p) \leq \int_M G(p, q, \sigma)^2 dV_M(p).$$

Nach Lemma 2 in §5 ist aber $G(p, q, \sigma) \leq C_1 \sigma(\sigma - n + 1)^{-1}$ für $\sigma > n-1$, also $G(p, q, \sigma) \leq C_1 n$ für $\sigma \geq n$, wobei die Konstante C_1 nur von M abhängt.

Somit gilt für $\sigma \geq n$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |F_{\lambda_j}(s) \varphi_j(q)|^2 \leq C_1^2 n^2 \int_M dV_M = C_1^2 n^2 \text{Vol}(M) = C_2.$$

Lemma 3

Es sei $k \in \mathbb{N}$, $Q_k = \{s = \sigma + i\tau / |\sigma| \leq k, |\tau| \leq k\}$ und $\lambda \geq 2k^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2$. Dann ist F_λ holomorph im Streifen $\{s / |\tau| \leq k\}$, und es gibt eine nur von k abhängige Konstante a_k derart, dass

$$|F_\lambda(s)| \leq \frac{a_k}{\lambda^k} |F_\lambda(s+2k)| \quad \forall s \in Q_k.$$

Beweis: Wegen 6.2.(5) genügt $F_\lambda(s)$ offenbar der Funktionalgleichung

$$(1) \quad F_\lambda(s) = F_\lambda(s+2k) \prod_{\ell=0}^{k-1} \frac{(s+2\ell)(s+2\ell+1)}{(s+2\ell)^2 - (n-1)(s+2\ell) + \lambda}$$

Nun ist $|s^2 - (n-1)s + \lambda| \geq \Re(s^2 - (n-1)s + \lambda) = \left(\sigma - \frac{n-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \lambda - \tau^2 \geq \lambda - \left(\tau^2 + \frac{1}{4}(n-1)^2\right)$, und hieraus folgt

$$(2) \quad |s^2 - (n-1)s + \lambda| \geq \frac{1}{2}\lambda \quad \text{für } \lambda \geq 2k^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2, |\tau| \leq k.$$

Für $\lambda \geq 2k^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2$ ist aber andererseits $\operatorname{Im} s_1(\lambda) = |\operatorname{Im} s_2(\lambda)| = \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}(n-1)^2} \geq \sqrt{2}k$, und daher liegen die Pole von F_λ ausserhalb $\{s/\tau \leq k\}$.

Ersetzen wir nun in (2) s durch $s+2\ell$, so ergibt sich aus (1) die für alle $\lambda \geq 2k^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2$ und alle $s = \sigma + i\tau$ mit $|\tau| \leq k$ gültige Ungleichung

$$|F_\lambda(s)| \leq \lambda^{-k} 2^k |s(s+1)\dots(s+2k-1)| |F_\lambda(s+2k)|.$$

Da $|s| \leq \sqrt{2}k$ für $s \in Q_k$, erhalten wir hieraus sofort die Behauptung.

7.5. Beweis von Satz 4. Wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = +\infty$ lässt sich zu jeder natürlichen Zahl k ein Index $j_1(k)$ so bestimmen, dass $\lambda_j \geq 2k^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2$ für alle $j \geq j_1(k)$. Dann folgt aus Lemma 3 für alle $m \geq \ell \geq j_1(k)$ und $(p, q, s) \in M \times M \times Q_k$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=\ell}^m |F_{\lambda_j(s)} \varphi_j(p) \overline{\varphi_j(q)}| &\leq a_k \sum_{j=\ell}^m |F_{\lambda_j(s+2k)} \varphi_j(q)| \frac{|\varphi_j(p)|}{\lambda_j^k} \leq \\ &\leq a_k \left(\sum_{j=\ell}^m |F_{\lambda_j(s+2k)} \varphi_j(q)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=\ell}^m \frac{|\varphi_j(p)|^2}{\lambda_j^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Nun sei $k \geq n$. Für $s \in Q_k$, $k \geq n$, ist aber $\operatorname{Re}(s+2k) \geq n$. Mit Lemma 2 ergibt sich daher

$$(1) \quad \sum_{j=\ell}^m |F_{\lambda_j(s)} \varphi_j(p) \overline{\varphi_j(q)}| \leq \sqrt{C_2} a_k \left(\sum_{j=\ell}^m \frac{|\varphi_j(p)|^2}{\lambda_j^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

für $k \geq n$, $m \geq \ell \geq j_1(k)$, $(p, q, s) \in M \times M \times Q_k$.

Wir setzen in (1) $p=q$ und integrieren über M . Wegen $\int_M |\varphi_j(p)|^2 dV_M(p) = 1$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \sum_{j=\ell}^m |F_{\lambda_j(s)}| &\leq \sqrt{C_2} a_k \int_M \left(\sum_{j=\ell}^m \frac{|\varphi_j(p)|^2}{\lambda_j^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} dV_M(p) \leq \\ &\leq \sqrt{C_2} a_k \left(\sum_{j=\ell}^m \int_M \frac{|\varphi_j(p)|^2}{\lambda_j^{2k}} dV_M(p) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M dV_M(p) \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

also

$$(2) \quad \sum_{j=\ell}^m |F_{\lambda_j(s)}| \leq \sqrt{C_2} a_k \sqrt{V_{\text{ol}}(M)} \left(\sum_{j=\ell}^m \lambda_j^{-2k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

für $k \geq n$, $m \geq \ell \geq j_1(k)$, $s \in Q_k$.

Aus (1), (2) und Lemma 1(b) von §2 schliessen wir jetzt: Für jedes

ganze $k \geq n$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=j_1(k)}^{\infty} F_{\lambda_j}(s) \varphi_j(p) \overline{\varphi_j(q)}$ gleichmässig auf $M \times M \times Q_k$ und $\sum_{j=j_1(k)}^{\infty} F_{\lambda_j}(s)$ gleichmässig auf Q_k . Dies beweist Satz 4, denn man kann zu dem vorgegebenen Kompaktum $Q \subset \mathbb{C}$ ein ganzes $k \geq n$ so wählen, dass $Q \subset Q_k$.

§8. Die Funktion $I(s)$ und das geometrische Spektrum

B.1. Es sei B ein kompakter Fundamentalbereich der Gruppe D . Nach Lemma 3 in §5 konvergiert dann für $\Re s > n-1$ die Reihe

$$\sum_{T \in D} \cos^{-s} g(T(p), p) = 1 + \sum_{T \neq \text{id}} \cos^{-s} g(T(p), p)$$

absolut gleichmässig gegen $G^*(p, p, s)$ auf B , wie auch immer die Anordnung der Elemente von D gewählt wird. Daher ist

$$(1) \quad I(s) = \int_B G^*(p, p, s) dV_H(p) = \text{Vol}(M) + \sum_{T \neq \text{id}} \int_B \cos^{-s} g(T(p), p) dV_M(p)$$

für $\Re s > n-1$. Aus der Reihe rechts leiten wir nun für die Funktion $I(s)$ die folgende Darstellung her:

Satz 6

Es sei Ω die Menge aller nicht trivialen freien Homotopieklasse von M . $\ell(\theta)$ bezeichne die Länge und $\mu(\theta)$ das gemäss Definition 2, §1, gebildete Gewicht von $\theta \in \Omega$. Dann gilt:

(a) Die Dirichlet-Reihe

$$L(s) := \sum_{\theta \in \Omega} \ell(\theta) \mu(\theta) \cos^{-s} \ell(\theta)$$

konvergiert absolut für $\Re s > n-1$.

$$(b) \quad I(s) = \text{Vol}(M) + \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} L(s) \quad \text{für } \Re s > n-1.$$

B.2. Zum Beweis von Satz 6 ordnen wir die Elemente von $D - \{\text{id}\}$ in einer für das folgende zweckmässigen Weise an. Dazu definieren wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Achsen der Gruppe D (i.e. auf der Menge aller Geraden von H , die durch mindestens ein $T \in D - \{\text{id}\}$ auf sich abgebildet werden) wie folgt: Wir nennen zwei Achsen α_1, α_2

von D äquivalent, wenn es ein $S \in D$ derart gibt, dass $S(\alpha_j) = \alpha_2$.

Nun sei $\{\alpha_j / j \in J\}$ ein Repräsentantensystem aller Äquivalenzklassen von Achsen der Gruppe D . P_j sei ein erzeugendes Element der gemäß Lemma 5 von §3 unendlich zyklischen Gruppe $D(\alpha_j) = \{S \in D / S(\alpha_j) = \alpha_j\}$, und $D = \bigcup_{k \in K} D(\alpha_j) T_{jk}$ sei eine Zerlegung von D in Rechtsnebenklassen nach der Untergruppe $D(\alpha_j)$; J und K sind offenbar endliche oder abzählbar unendliche Indexmengen. Dann gilt

- (I) $\{P_j^m / j \in J, m \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$ ist ein Repräsentantensystem aller Klassen $\neq \{id\}$ konjugierter Elemente von D .
- (II) $D - \{id\} = \{T_{jk}^{-1} P_j^m T_{jk} / j \in J, k \in K, m \neq 0\}$. In der Menge rechts kommt jedes Element von $D - \{id\}$ genau einmal vor.
- (III) Ist B ein Fundamentalbereich der Gruppe D , so ist $B_j := \bigcup_{k \in K} T_{jk}(B)$ ein Fundamentalbereich von $D(\alpha_j)$.

Der Beweis für die Aussagen (I) bis (III) lässt sich unter Verwendung von 3.8.(1), (2) und (3) wörtlich aus [6] übertragen; man vergleiche dort die Abschnitte 5.6 bis 5.10.

8.3. Aufgrund von (II) und 8.1.(1) ergibt sich jetzt für $\Re s > n-1$:

$$\begin{aligned} I(s) - \text{Vol}(M) &= \sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \int_B \cos^{-s} g(T_{jk}^{-1} P_j^m T_{jk}(p), p) dV_H(p) = \\ &= \sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \int_B \cos^{-s} g(P_j^m T_{jk}(p), T_{jk}(p)) dV_H(p) = \\ &= \sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \int_{T_{jk}(B)} \cos^{-s} g(P_j^m(p), p) dV_H(p). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $\sigma = \Re s > n-1$:

$$\sum_{k \in K} \int_{T_{jk}(B)} |\cos^{-s}(P_j^m(p), p)| dV_H(p) = \sum_{k \in K} \int_{T_{jk}(B)} \cos^{-\sigma} g(P_j^m(p), p) dV_H(p) \leq I(\sigma).$$

Daher ist die Funktion $\cos^{-s} g(P_j^m(p), p)$ für $\Re s > n-1$ über $B_j = \bigcup_{k \in K} T_{jk}(B)$ integrierbar. Da zudem $T_{jk}(B) \cap T_{j\ell}(B)$ für $k \neq \ell$ eine Menge vom Mass Null in H ist, wird

$$\int_{B_j} \cos^{-s} g(P_j^m(p), p) dV_H(p) = \sum_{k \in K} \int_{T_{jk}(B)} \cos^{-s} g(P_j^m(p), p) dV_H(p).$$

Wir erhalten demnach

$$(1) \quad I(s) - \text{Vol}(M) = \sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} \int_{B_j} \cos^{-s} g(P_j^m(p), p) dV_H(p) \quad \text{für } \Re s > n-1.$$

8.4. Wir berechnen nun für festes $j \in J$ und ganze $m \neq 0$ das Integral

$$(1) \quad I_{jm}(s) := \int_{B_j} \cos^{-s} g(P_j^m(p), p) dV_H(p).$$

Da P_j eine Translation von H ist, gibt es nach Lemma 2 in §4 ein solches Poincarésches Koordinatensystem $x_1, \dots, x_n$ auf H , dass

$$(2) \quad x_i(P_j(p)) = b \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} x_k(p) \quad (i=1, \dots, n-1),$$

$$x_n(P_j(p)) = b x_n(p),$$

wobei $A = (\alpha_{ik})_{1 \leq i, k \leq n-1}$ eine orthogonale Matrix und $b = e^{\ell(P_j)} > 1$ ist.

Man erkennt hieraus, dass die Menge

$$(3) \quad B^* := \{p \in H / 1 \leq x_n(p) \leq b\}$$

einen Fundamentalbereich der von P_j erzeugten unendlich zyklischen Gruppe $D(\alpha_j)$ bildet. Nach 8.2.(III) ist andererseits $B_j = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T_{jk}(B)$ ein Fundamentalbereich der Gruppe $D(\alpha_j)$, und der Integrand $\cos^{-s} g(P_j^m(p), p)$ ist bezüglich $D(\alpha_j)$ automorph. Damit können wir in (1) B_j durch B^* ersetzen, sodass

$$(4) \quad I_{jm}(s) = \int_{B^*} \cos^{-s} g(P_j^m(p), p) dV_H(p).$$

Zur weiteren Berechnung von $I_{jm}(s)$ führen wir folgende Bezeichnungen ein: Wir ordnen jedem $p \in H$ den Punkt $u(p) := (x_1(p), \dots, x_{n-1}(p))$ im $\mathbb{R}^{n-1}$ zu, $(\cdot | \cdot)$ bezeichne das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^{n-1}$, $|\cdot|$ die zugehörige Norm. Für die Distanz zweier Punkte p, q von H ergibt sich dann aus 4.2.(4) die Formel

$$(5) \quad \cos g(p, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n(p)}{x_n(q)} + \frac{x_n(q)}{x_n(p)} \right) + \frac{|u(p) - u(q)|^2}{2x_n(p)x_n(q)}$$

Andererseits folgt aus (2): $u(P_j^m(p)) = b^m A^m u(p)$, $x_n(P_j^m(p)) = b^m x_n(p)$, wobei die orthogonale Matrix $A = (\alpha_{ik})$ als isometrische Abbildung $A: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ aufgefasst wird. Setzen wir nun in (5) $q = P_j^m(p)$, so kommt

$$(6) \quad \text{Cos } g(P_j^m(p), p) = \frac{1}{2}(b^m + b^{-m}) \left(1 + \frac{|u(p)|}{x_n^2(p)} \right) - \frac{(A^m u(p) | u(p))}{x_n^2(p)}$$

heraus. Nun ist $\ell(P_j^m) = |m| \ell(P_j)$ nach Lemma 1 in §3 und $b = e^{\ell(P_j)}$, also $\frac{1}{2}(b^m + b^{-m}) = \text{Cos } \ell(P_j^m)$. Beachten wir schliesslich, dass nach 4.1 $\{u(p) / p \in H_j\} = \mathbb{R}^{n-1}$, $dv_H = x_n^{-n} dx_1 \dots dx_n$, so erhalten wir aus (3), (4) und (6):

$$I_{jm}(s) = \text{Cos}^{-s} \ell(P_j^m) \int_{x_n=1}^b \left(\int_{u \in \mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \frac{|u|^2}{x_n^2} - \frac{(A^m u | u)}{x_n^2 \text{Cos } \ell(P_j^m)} \right)^{-s} du \right) \frac{dx_n}{x_n}$$

(du bezeichnet das euklidische Volumenelement des $\mathbb{R}^{n-1}$). Im inneren Integral führen wir jetzt die Transformation $y = x_n u$ aus. Dies ergibt

$$I_{jm}(s) = \text{Cos}^{-s} \ell(P_j^m) K_{jm}(s) \int_{x_n=1}^b \frac{dx_n}{x_n}$$

mit

$$K_{jm}(s) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + |y|^2 - \frac{(A^m y | y)}{\text{Cos } \ell(P_j^m)} \right)^{-s} dy$$

Wegen $b = e^{\ell(P_j)}$ ist $\int_1^b x_n^{-1} dx_n = \ell(P_j)$. Da zudem P_j die Gruppe $D(\alpha_j)$ erzeugt, ist es ein primitives Element von D (Lemma 5, §3), sodass $\nu(P_j^m) = |m|$, $\ell(P_j) = \frac{\ell(P_j^m)}{\nu(P_j^m)}$. Wir erhalten

$$(7) \quad I_{jm}(s) = \text{Cos}^{-s} \ell(P_j^m) \frac{\ell(P_j^m)}{\nu(P_j^m)} K_{jm}(s).$$

Zur Berechnung des Integrals $K_{jm}(s)$ transformieren wir zunächst die orthogonale Matrix A^m wie folgt: Es seien $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ die Eigenwerte von A^m . Dann gibt es bekanntlich eine orthogonale $(n-1)$ -Matrix B derart, dass die quadratische Form $(BA^m B^{-1} v | v)$, $v = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, die Gestalt hat

$$(BA^m B^{-1} v | v) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k^2, \quad \alpha_k = \text{Re } \beta_k.$$

Weil B^{-1} eine Isometrie des $\mathbb{R}^{n-1}$ ist, ergibt die Substitution $y = B^{-1} v$ im Integral $K_{jm}(s)$:

$$\begin{aligned} K_{jm}(s) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + |v|^2 - \frac{(BA^m B^{-1} v | v)}{\text{Cos } \ell(P_j^m)} \right)^{-s} dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha_k}{\text{Cos } \ell(P_j^m)} \right) v_k^2 \right)^{-s} dv_1 \dots dv_{n-1}. \end{aligned}$$

Wegen $|\alpha_k| \leq 1$, $\cos \ell(P_j^m) > 1$ können wir sodann die Substitution

$$v_k \left(1 - \frac{\alpha_k}{\cos \ell(P_j^m)} \right)^{\frac{1}{2}} = u_k \quad (k=1, \dots, n-1)$$

ausführen. Dies liefert

$$h_{jm}(s) = \left\{ \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\cos \ell(P_j^m)}{\cos \ell(P_j^m) - \alpha_k} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|u|^2)^{-s} du.$$

Beim letzten Integral führt man im Falle $n \geq 3$ Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^{n-1}$ ein und erhält

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|u|^2)^{-s} du = \text{Vol}(S^{n-2}) \int_0^\infty (1+r^2)^{-s} r^{n-2} dr = \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \quad (\text{Re } s > \frac{n-1}{2}).$$

Das Resultat stimmt auch für $n=2$. Zusammen mit (7) ergibt sich endlich

$$(8) \quad I_{jm}(s) = \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \frac{\ell(P_j^m)}{\nu(P_j^m)} \cos^{-s} \ell(P_j^m) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\cos \ell(P_j^m)}{\cos \ell(P_j^m) - \text{Re } \beta_k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

wobei also $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ die Eigenwerte der durch (2) gegebenen Matrix A^m bezeichnen.

8.5. Unseren Überlegungen haben wir stets eine feste universelle Überlagerung $\Psi: H \rightarrow M$ zugrunde gelegt. Die in 3.9 erklärte Zuordnung $\theta \mapsto K(\theta)$ liefert dabei eine bijektive Abbildung der Menge Ω aller nicht trivialen freien Homotopieklassen von M auf die Menge aller Klassen $K \neq \{\text{id}\}$ konjugierter Elemente von D . Insbesondere entspricht dem Element P_j^m von D genau eine freie Homotopieklasse θ_{jm} von M , sodass

$$(1) \quad K(\theta_{jm}) = \{Q P_j^m Q^{-1} / Q \in D\}.$$

Dabei gilt nach 3.9.(IV) und (V):

$$(2) \quad \ell(P_j^m) = \ell(\theta_{jm}), \quad \nu(P_j^m) = \nu(\theta_{jm}).$$

Aus 8.2.(I) folgt ferner

$$(3) \quad \Omega = \{\theta_{jm} / j \in J, m \neq 0\},$$

wobei in der Menge rechts jedes Element von Ω genau einmal vorkommt. Für das gemäß Definition 2, §1 gebildete Gewicht $\mu(\theta_{jm})$ gilt schliesslich, wie wir noch zeigen werden, die Formel

$$(4) \quad \mu(\theta_{jm}) = \frac{1}{\nu(P_j^m)} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\cos \ell(P_j^m)}{\cos \ell(P_j^m) - \Re \beta_k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wir führen damit den Beweis von Satz 6 zu Ende und werden nachher die Richtigkeit von (4) beweisen. Aus (2), (4) und 8.4.(8) erhalten wir

$$(5) \quad I_{jm}(s) = \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \ell(\theta_{jm}) \mu(\theta_{jm}) \cos^{-s} \ell(\theta_{jm}).$$

Andererseits folgt aus 8.3.(1) und 8.4.(1) für alle s mit $\sigma = \Re s > n-1$:

$$I(s) = \text{Vol}(M) + \sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} I_{jm}(s)$$

$$\sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} |I_{jm}(s)| \leq \sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} I_{jm}(\sigma) \leq I(\sigma) < +\infty.$$

Wegen (5) konvergiert daher die Reihe $\sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} \ell(\theta_{jm}) \mu(\theta_{jm}) \cos^{-s} \ell(\theta_{jm})$ für $\Re s > n-1$ absolut, und es gilt

$$I(s) = \text{Vol}(M) + \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{m \neq 0} \sum_{j \in J} \ell(\theta_{jm}) \mu(\theta_{jm}) \cos^{-s} \ell(\theta_{jm}).$$

Unter Berücksichtigung von (3) ist damit gezeigt: In der Halbebene $\Re s > n-1$ gilt

$$I(s) = \text{Vol}(M) + \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{\theta \in \Omega} \ell(\theta) \mu(\theta) \cos^{-s} \ell(\theta),$$

wobei die Reihe rechts absolut konvergiert. Damit ist Satz 6, bis auf die Relation (4), bewiesen.

Wir erbringen nun den Beweis von (4). Es sei $S = P_j^m$, $c = m\ell(P_j)$, $(x_1, \dots, x_n)$ das gemäß 8.4.(2) gewählte Poincarésche Koordinatensystem, und c_{ik} ($1 \leq i, k \leq n-1$) seien die Elemente der orthogonalen Matrix A^m . Dann folgt aus 8.4.(2)

$$(6) \quad x_1 \circ S = e^c \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} x_k \quad \text{für } i=1, \dots, n-1;$$

$$x_n \circ S = e^c x_n.$$

Ferner sei $\mu: \mathbb{R} \rightarrow H$ die durch $x_1(\mu(t)) = \dots = x_{n-1}(\mu(t)) = 0$, $x_n(\mu(t)) = e^{ct}$ ($t \in \mathbb{R}$) definierte Geodätische. Dann gilt

$$(7) \quad S(\mu(t)) = \mu(t+1) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

und die Vektorfelder $V_1, \dots, V_n$ längs μ mit $V_i(t) = x_n(\mu(t)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \mu(t)$ bilden nach Lemma 1 von §4 ein Orthonormalsystem von Parallelfeldern längs μ .

Nach (1) ist aber $S = P_j^m \in K(\Theta_{jm})$. Da die Ueberlagerungsabbildung $\Psi: H \rightarrow M$ differenzierbar und längentreu ist, folgt aus $\Psi \circ S = \Psi$ und (7): Die Kurve $\gamma := \Psi \circ \mu: \mathbb{R} \rightarrow M$ ist eine differenzierbar geschlossene Geodätische von Θ_{jm} (d.h. $\gamma(t+1) = \gamma(t)$ und $\gamma|_{[0,1]} \in \Theta_{jm}$), und die Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$ mit $X_i(t) := \Psi_*(V_i(t))$ ($i=1, \dots, n; t \in \mathbb{R}$) sind längs γ parallel und orthonormal.

Wir berechnen damit die Parallelverschiebung $P_\gamma: M_{\gamma(0)} \xrightarrow{\sim} M_{\gamma(1)}$ längs $\gamma: [0,1] \rightarrow M$. Die Tangentialvektoren $X_1(0), \dots, X_n(0)$ bilden offenbar eine Orthonormalbasis von $M_{\gamma(0)}$, und es gilt

$$(8) \quad P_\gamma(X_i(0)) = X_i(1) = (\Psi_*)_{\gamma(1)}(V_i(1)) \quad (i=1, \dots, n).$$

Wegen $\Psi \circ S^{-1} = \Psi$ und $S^{-1}(\gamma(1)) = \gamma(0)$ hat man aber

$$(9) \quad (\Psi_*)_{\gamma(1)} = (\Psi_*)_{\gamma(0)} \circ (S^{-1})_{\gamma(1)}.$$

Die Differentialabbildung $(S^{-1})_{\gamma(1)}: H_{\gamma(1)} \rightarrow H_{\gamma(0)}$ lässt sich leicht aus (6) berechnen, es wird

$$(10) \quad (S^{-1})_{\gamma(1)}(V_i(1)) = \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} V_k(0) \quad (i=1, \dots, n-1).$$

Damit erhalten wir jetzt aus (8), (9) und (10):

$$(11) \quad P_\gamma(X_i(0)) = (\Psi_*)_{\gamma(1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} V_k(0) \right) = \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} \Psi_*(V_k(0)) = \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} X_k(0)$$

für $i=1, \dots, n-1$.

Andererseits ist $\dot{\mu}(t) = cV_n(t)$, also $\dot{\gamma}(t) = cX_n(t)$. Die Tangentialvektoren $X_1(0), \dots, X_{n-1}(0)$ spannen somit den zu $\dot{\gamma}(0)$ senkrechten Teilraum von $M_{\gamma(0)}$ auf, der unter P_γ invariant ist. Die Eigenwerte der Restriktion von P_γ auf den zu $\dot{\gamma}(0)$ senkrechten Teilraum von $M_{\gamma(0)}$ stimmen daher nach (11) mit den Eigenwerten $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ der orthogonalen Matrix $(c_{ik}) = A^m$ überein. Da γ eine differenzierbar geschlossene Geodätische von Θ_{jm} ist, folgt jetzt unter Berücksichtigung der Tatsache, dass M die Schnittkrümmung -1 besitzt: Das Gewicht der freien Homotopieklasse Θ_{jm} beträgt

$$\mu(\theta_{jm}) = \frac{1}{\nu(\theta_{jm})} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\cos \ell(\theta_{jm})}{\cos \ell(\theta_{jm}) - \Re \beta_k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Zusammen mit (2) ergibt sich hieraus tatsächlich die noch zu beweisende Beziehung (4), womit Satz 6 vollständig bewiesen ist.

B.6. Aus Satz 6(a) folgt insbesondere für reelle $\sigma > n-1$:

$$(1) \quad 0 < \sum_{\pi \in \Omega^*} \ell(\pi) \mu(\pi) \cos^{-\sigma} \ell(\pi) < L(\sigma) < +\infty,$$

wenn Ω^* die Menge der primitiven freien Homotopieklassen von M bezeichnet. Für primitive π ist aber $\nu(\pi) = 1$. Gemäss Definition 2, §1 gilt daher

$$(2) \quad \mu(\pi) \geq \left(\frac{\cos \ell(\pi)}{\cos \ell(\pi) + 1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \geq (\sqrt{2})^{-n+1}.$$

Andererseits ist die Zahl $\ell_0 = \inf \{ \ell(\theta) / \theta \in \Omega \}$ positiv, weil M kompakt ist. Aus (1) und (2) ergibt sich daher für alle reellen $t > 0$, $\sigma > n-1$:

$$\sum_{\pi \in \Omega^*, \ell(\pi) \leq t} 1 \leq \frac{1}{\ell_0} (\sqrt{2})^{n-1} \cos^{-\sigma} t L(\sigma) < +\infty.$$

Dies zeigt, dass es zu jedem $t > 0$ höchstens endlich viele primitive Homotopieklassen π der Länge $\ell(\pi) \leq t$ gibt. Nach 3.9.(IV) lässt sich aber jede freie Homotopieklasse $\theta \in \Omega$ eindeutig in der Form $\theta = \pi^m$ mit primitivem π und $m \in \mathbb{N}$ darstellen, und es ist $\ell(\theta) = m \ell(\pi)$ nach 3.9.(VI). Daher ist auch die Anzahl aller freien Homotopieklassen der Länge $\leq t$ auf M für jedes $t > 0$ endlich. Insbesondere ist für $t > 0$ die Funktion $h_M(t) = \sum_{\theta \in \Omega, \ell(\theta) = t} \mu(\theta)$ wohldefiniert, und die Zahlenmenge $\{t > 0 / h_M(t) \neq 0\} = \{\ell(\theta) / \theta \in \Omega\}$ liegt in $\mathbb{R}$ diskret. $h_M(t)$ ist das in Definition 3, §1 unter Benützung von Satz B eingeführte geometrische Spektrum von M . Nun gilt offenbar

$$(3) \quad L(s) = \sum_{t > 0} t h_M(t) \cos^{-s} t \quad \text{für } \Re s > n-1.$$

Wir zeigen nun, dass sich das geometrische Spektrum aus $L(s)$ zurückgewinnen lässt:

Satz 7

Für alle $t > 0$ gilt

$$h_M(t) = \frac{\cos n t}{t} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T L(n + i\tau) e^{i\tau \log \cos t} d\tau.$$

Beweis: Es sei $t > 0$, $\sigma > n-1$, $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt aus (3)

$$L(\sigma + i\tau) e^{i\tau \log \text{Cost}} = \sum_{x>0} h_M(x) x \cos^{-\sigma} x e^{-i\tau \log \left(\frac{\cos x}{\text{Cost}} \right)},$$

wobei die Reihe rechts absolut gleichmäßig in τ auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

Hieraus erhalten wir durch gliedweise Integration

$$(4) \quad \int_0^T L(\sigma + i\tau) e^{i\tau \log \text{Cost}} d\tau = Th_M(t) t \cos^{-\sigma} t + f(T)$$

mit

$$(5) \quad f(T) = \sum_{x \neq t} h_M(x) x \cos^{-\sigma} x \frac{1 - e^{-iT \log \left(\frac{\cos x}{\text{Cost}} \right)}}{i \log \left(\frac{\cos x}{\text{Cost}} \right)}.$$

Da t nicht Häufungspunkt der Menge $\{x/h_M(x) \neq 0\}$ ist, ergibt sich aus

(3) und (5) die Existenz einer nur von σ und t abhängigen positiven

Konstanten $\delta(t, \sigma)$ derart, dass $|f(T)| \leq \delta(t, \sigma) L(\sigma)$. Daher ist

$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{f(T)}{T} = 0$, also nach (4):

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T L(\sigma + i\tau) e^{i\tau \log \text{Cost}} d\tau = t h_M(t) \cos^{-\sigma} t.$$

Setzen wir hierin $\sigma = n$, so erhalten wir Satz 7.

§9. Herleitung der Ergebnisse

9.1. Jeder n -dimensionalen hyperbolischen Raumform der Schnittkrümmung -1 können wir die zwei Funktionen

$$(1) \quad L_M(s) = \sum_{t>0} t h_M(t) \cos^{-s} t = \sum_{\theta \in \Omega} \ell(\theta) \mu(\theta) \cos^{-s} \ell(\theta),$$

$$(2) \quad F_M(s) = \sum_{\lambda>0} d_M(\lambda) F_\lambda(s)$$

zuordnen, welche mit dem geometrischen Spektrum bzw. dem Eigenwert-

spektrum von M zusammenhängen. Ein Vergleich von Satz 6(b) mit

Satz 5(b) ergibt folgenden Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen:

Satz 8

Für $\Re s > n-1$ gilt

$$(3) \quad L_M(s) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right)} + \frac{\Gamma(s)}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right)} (F_M(s) - \text{Vol}(M)),$$

$$(4) \quad F_M(s) = \text{Vol}(M) - \pi^{\frac{1}{2}n} \frac{\Gamma\left(\frac{s-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} + \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(s)} L_M(s).$$

Durch (3) und Satz 5(a) wird die zunächst nur in der Halbebene $\Re s > n-1$ erklärte Funktion $L_M(s)$ zu einer in der ganzen s -Ebene meromorphen Funktion fortgesetzt. Auf diese Tatsache stützt sich der Beweis der in §1 formulierten Ergebnisse hauptsächlich.

9.2. Aus (3) und Satz 5(c) schliessen wir: Für $\Re s > n-1$ gilt

$$\sum_{\theta \in \Omega} \ell(\theta) \mu(\theta) \cos^{-s} \ell(\theta) = \frac{2^{n-1}}{s-n+1} + f(s)$$

mit einer in der ganzen s -Ebene meromorphen Funktion f , und es gibt eine solche reelle Zahl $\sigma_1 < n-1$, dass f in der Halbebene $\Re s > \sigma_1$ holomorph ist. Für die Funktion

$$(1) \quad \psi(t) = \sum_{\theta \in \Omega, \ell(\theta) \leq t} \ell(\theta) \mu(\theta) = \sum_{0 < \tau \leq t} \tau h_M(\tau)$$

ergibt sich hieraus mit Hilfe des Tauberschen Theorems von Wiener Ikehara ([10], p.127) das folgende asymptotische Verhalten

$$(2) \quad \psi(t) \sim \frac{2^{n-1}}{n-1} \cos^{n-1} t \sim \frac{e^{(n-1)t}}{n-1} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Wir betrachten nun

$$(3) \quad \omega(t) := \sum_{\theta \in \Omega, \ell(\theta) \leq t} \mu(\theta) = \sum_{0 < \tau \leq t} h_M(\tau) \quad (t > 0).$$

Berücksichtigen wir, dass $\psi(t)$ auf dem Intervall $0 < t < \ell_0 = \inf\{\ell(\theta)/\theta \in \Omega\}$ verschwindet, so folgt aus (1) und (3) offenbar

$$(4) \quad \omega(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} d\psi(\tau) = \frac{\psi(t)}{t} + \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\tau^2} d\tau \quad \text{für } t > 0.$$

Mit (2) bestätigt man aber leicht

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} d\tau \sim \frac{e^{(n-1)t}}{(n-1)^2 t^2} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty,$$

sodass aus (2) und (4)

$$(5) \quad \omega(t) \sim \frac{e^{(n-1)t}}{(n-1)t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty$$

folgt. Jetzt setzen wir

$$(6) \quad \psi(t) := \sum_{\theta \in \Omega, \ell(\theta) \leq t} \frac{1}{v(\theta)} \quad \text{für } t > 0.$$

Aufgrund der Definition von $\mu(\theta)$ gilt aber

$$\mu(\theta) \left(\frac{\cos \ell(\theta) - 1}{\cos \ell(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \leq \frac{1}{v(\theta)} \leq \mu(\theta) \left(\frac{\cos \ell(\theta) + 1}{\cos \ell(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$

und hieraus folgt wegen (3), (5) und (6):

$$(7) \quad \psi(t) \sim \frac{e^{(n-1)t}}{(n-1)t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Daher gibt es insbesondere eine solche Konstante $C > 0$, dass

$$(8) \quad \psi(t) \leq \frac{C e^{(n-1)t}}{t} \quad \text{für alle } t > 0.$$

Da sich jede Klasse $\theta \in \Omega$ eindeutig in der Form $\theta = \pi^m$ mit primitivem π und $m \in \mathbb{N}$ darstellen lässt und dabei $\ell(\theta) = m \ell(\pi)$, $v(\theta) = m$ ist, besteht zwischen $\psi(t)$ und der Anzahl $P_M(t)$ aller primitiven freien Homotopie-klassen π der Länge $\ell(\pi) \leq t$ die folgende Relation:

$$(9) \quad \psi(t) = P_M(t) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} P_M\left(\frac{t}{m}\right).$$

Andererseits ist $P_M(t/m) = 0$ für $(t/m) < \ell_0$. Damit ergibt sich aus (8) und (9) für $t > 2\ell_0$:

$$0 \leq \psi(t) - P_M(t) = \sum_{2 \leq m \leq t/\ell_0} \frac{1}{m} P_M\left(\frac{t}{m}\right) \leq \sum_{2 \leq m \leq t/\ell_0} \frac{1}{m} \psi\left(\frac{t}{m}\right) \leq \frac{C}{\ell_0} e^{\frac{1}{2}(n-1)t}$$

und hieraus folgt mit (7):

$$(10) \quad P_M(t) \sim \frac{e^{(n-1)t}}{(n-1)t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Für die Anzahl $N_M(t)$ aller freien Homotopie-klassen der Länge $\leq t$ auf

M gilt offenbar

$$N_M(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_M\left(\frac{t}{m}\right).$$

Man erhält hieraus mit (10) wieder $N_M(t) \sim \frac{e}{(n-1)t} \frac{(n-1)t}{(n-1)t}$ für $t \rightarrow +\infty$.
Wir fassen zusammen:

Lemma 1

Für jede n-dimensionale hyperbolische Raumform der Schnittkrümmung -1 gilt:

$$\omega_M(t) := \sum_{0 < \tau \leq t} h_M(\tau) \sim \frac{e}{(n-1)t} \frac{(n-1)t}{(n-1)t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty,$$

$$P_M(t) \sim N_M(t) \sim \frac{e}{(n-1)t} \frac{(n-1)t}{(n-1)t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

9.3. Nun seien zwei hyperbolische Raumformen M_1 und M_2 gegeben. Um den in §1 formulierten Satz 8 zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass die beiden Aussagen

$$(I) \quad h_{M_1}(t) = h_{M_2}(t) \quad \text{für alle } t > 0$$

$$(II) \quad d_{M_1}(\lambda) = d_{M_2}(\lambda) \quad \text{für alle } \lambda > 0$$

äquivalent sind. Wir zeigen zuerst

Lemma 2.

Für den Fall, dass M_1 und M_2 beide dieselbe Dimension n und die Schnittkrümmung -1 besitzen, sind (I) und (II) äquivalent.

Beweis: Sei zunächst (I) erfüllt. Dann folgt aus 9.1.(1) $L_{M_1}(s) = L_{M_2}(s)$ für $\operatorname{Re} s > n-1$, und hieraus wegen 9.1.(4) $F_{M_1}(s) - F_{M_2}(s) = \operatorname{Vol}(M_1) - \operatorname{Vol}(M_2)$.

Die meromorphe Funktion $f := F_{M_1} - F_{M_2}$ ist damit in der ganzen s-Ebene konstant. Wir nehmen nun an, M_1 und M_2 besäßen verschiedene Eigenwertspektren. Dann gibt es einen kleinsten Wert λ^* , $\lambda^* > 0$, für den

$$(1) \quad d_{M_1}(\lambda^*) \neq d_{M_2}(\lambda^*).$$

Nach Lemma 3 in §7 ist der Hauptteil von f an der Stelle $s_1(\lambda^*)$ gleich dem Hauptteil der Funktion

$$\sum_{0 < \lambda \leq \lambda^*} (d_{M_1}(\lambda) - d_{M_2}(\lambda)) F_\lambda = (d_{M_1}(\lambda^*) - d_{M_2}(\lambda^*)) F_{\lambda^*}$$

in $s_1(\lambda^*)$ - man beachte: $d_{M_1}(\lambda) = d_{M_2}(\lambda)$ für $\lambda < \lambda^*$. Andererseits erkennt man aus 6.2.(1) und 6.2.(3) leicht, dass $s_1(\lambda^*)$ stets ein Pol von F_{λ^*} ist. Da $f(s)$ an der Stelle $s=s_1(\lambda^*)$ regulär ist, folgt $d_{M_1}(\lambda^*) = d_{M_2}(\lambda^*)$, im Widerspruch zu (1). Demnach gilt $d_{M_1}(\lambda) = d_{M_2}(\lambda)$ für alle $\lambda > 0$, sodass (II) aus (I) folgt.

Nun sei (II) erfüllt. Dann folgt aus 9.1.(2): $F_{M_1}(s) = F_{M_2}(s)$. Gemäss Lemma 2 in §2 ist andererseits $\text{Vol}(M_1) = \text{Vol}(M_2)$. Mit 9.1.(3) ergibt sich daher $L_{M_1}(s) = L_{M_2}(s)$ für $\text{Re } s > n-1$. Wegen Satz 7 folgt jetzt tatsächlich $h_{M_1}(t) = h_{M_2}(t)$ für $t > 0$. Damit ist Lemma 2 bewiesen.

9.4. Ersetzt man auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $M=(M,g)$ den Masstensor g durch den Masstensor kg (k eine positive reelle Zahl), so multipliziert sich die Länge eines Weges mit dem Faktor $\sqrt{k}$, die Schnittkrümmung mit $\frac{1}{k}$. Die zu g und kg gehörigen kovarianten Ableitungen sind dieselben, man hat also für beide Strukturen dieselben Geodätischen und dieselben Parallelfelder längs differenzierbarer Kurven. Nun sei $M=(M,g)$ eine n -dimensionale hyperbolische Raumform der Schnittkrümmung $-k$, $k > 0$. Dann ist also $\bar{M}=(M,kg)$ eine n -dimensionale hyperbolische Raumform der Schnittkrümmung -1 , und man bestätigt mit Hilfe der oben erwähnten Tatsachen leicht die folgenden Relationen (der Querstrich über einer Invariante bezieht sich auf $\bar{M}$):

- (1) $\bar{\ell}(\theta) = \sqrt{k} \ell(\theta)$ für alle freien Homotopieklassen θ auf M ,
- (2) $\bar{\nu}(\theta) = \nu(\theta)$ für alle $\theta \neq 0$,
- (3) $\bar{\mu}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{k}} \mu(\theta)$ für alle $\theta \neq 0$,
- (4) $\bar{\Delta}^M = \frac{1}{k} \Delta^M$

Aus (1) und (3) folgt gemäss Definition 3, §1:

- (5) $h_M(t) = \sqrt{k} h_{\bar{M}}(\sqrt{k} t)$ für alle $t > 0$.

Wegen (4) gilt

- (6) $d_M(\lambda) = d_{\bar{M}}\left(\frac{\lambda}{k}\right)$ für alle $\lambda > 0$.

Schliesslich erhalten wir aus (5) und Lemma 1, weil $\bar{M}$ die Schnittkrümmung -1 hat:

$$\sum_{0 < \tau \leq t} h_M(\tau) = \sqrt{k} \omega_M(\sqrt{k} t) \sim \frac{e^{\sqrt{k}(n-1)t}}{(n-1)t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Daraus ergibt sich sofort das

Lemma 3

Hyperbolische Raumformen mit gleichem geometrischem Spektrum besitzen auch gleiche Dimension und gleiche Schnittkrümmung.

9.5. Mit Hilfe von 9.4. sind nun die in §1 formulierten Sätze A und B leicht zu beweisen: Es sei also $M = (M, g)$ eine n -dimensionale hyperbolische Raumform der Schnittkrümmung $-k$, $k > 0$, und $\bar{M} = (M, k g)$. Dann folgt aus 9.4.(1), (2): $P_M(t) = P_{\bar{M}}(\sqrt{k} t)$, $N_M(t) = N_{\bar{M}}(\sqrt{k} t)$ für alle $t > 0$. Hieraus schliessen wir mit Lemma 1, da $\bar{M}$ die Schnittkrümmung -1 hat:

$$P_M(t) \sim N_M(t) \sim \frac{e^{\sqrt{k}(n-1)t}}{\sqrt{k}(n-1)t} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Dies beweist Satz A.

Beweis von Satz B: Es seien M_1 und M_2 hyperbolische Raumformen mit gleichem geometrischem Spektrum: $h_{M_1}(t) = h_{M_2}(t)$ für alle $t > 0$. Nach Lemma 3 besitzen dann M_1 und M_2 beide dieselbe Schnittkrümmung $-k$ und dieselbe Dimension. Sind daher $\bar{M}_1$ und $\bar{M}_2$ die entsprechenden Raumformen der Schnittkrümmung -1 , so folgt aus 9.4.(5): $h_{\bar{M}_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{k}} h_{M_1}\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} h_{M_2}\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) = h_{\bar{M}_2}(t)$ für alle $t > 0$, und hieraus wegen Lemma 2:

$d_{\bar{M}_1}(\lambda) = d_{\bar{M}_2}(\lambda)$ für alle $\lambda > 0$. Wegen 9.4.(6) gilt daher tatsächlich: $d_{M_1}(\lambda) = d_{M_2}(\lambda)$ für alle $\lambda > 0$. Damit besitzen M_1 und M_2 dasselbe Eigenwertspektrum.

Gilt andererseits $d_{M_1}(\lambda) = d_{M_2}(\lambda)$ für alle $\lambda > 0$, so besitzen nach Lemma 2 in §2 M_1 und M_2 dieselbe Schnittkrümmung $-k$ und dieselbe Dimension. Wegen 9.4.(6) gilt daher $d_{\bar{M}_1}(\lambda) = d_{\bar{M}_2}(\lambda)$ für alle $\lambda > 0$, und hieraus folgt mit Lemma 2: $h_{\bar{M}_1}(t) = h_{\bar{M}_2}(t)$ für alle $t > 0$. Nach 9.4.(5) gilt dann auch $h_{M_1}(t) = h_{M_2}(t)$ für alle $t > 0$. Damit ist auch Satz B vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] Berger M., Gauduchon P. & Mazet E.: Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Mathematics 194 (1971)
- [2] Bishop R.L. & Crittenden R.J.: Geometry of Manifolds, Academic Press, New York 1964
- [3] Duschek A. & Mayer W.: Lehrbuch der Differentialgeometrie, Band 2, Verlag Teubner, Leipzig und Berlin 1930
- [4] Gromoll D., Klingenberg W. & Meyer W.: Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics 55 (1968)
- [5] Hermann O.: Ueber die Verteilung der Längen geodätischer Lote in hyperbolischen Raumformen, Math. Ztschr. 79, 323 - 343 (1962)
- [6] Huber H.: Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, Math. Annalen 138, 1 - 26 (1959)
- [7] Jürgens K.: Lineare Integraloperatoren, Verlag Teubner, Stuttgart 1970
- [8] de Rham G.: Variétés différentiables, Verlag Hermann, Paris 1960
- [9] Rinow W.: Die innere Geometrie der metrischen Räume, Springer Verlag, Berlin 1961
- [10] Wiener N.: The Fourier Integral and certain of its Applications, University Press, Cambridge 1933

Curriculum vitae

Am 22. Juli 1943 wurde ich, Hans Riggenbach, Bürger von Rünenberg (Baselland), als Sohn des Walter Riggenbach, von Beruf Sattler, und der Ida, geb. Buser, in Rünenberg geboren. Ich besuchte dort von 1950 bis 1955 die Primarschule, von 1955 bis 1959 die Realschule in Gelterkinden und anschliessend das Realgymnasium in Basel, das ich im Frühjahr 1962 mit dem Maturitätszeugnis (Typus B) verliess. Im Sommersemester des gleichen Jahres begann ich mit dem Studium der Mathematik an der Universität Basel. Im Herbst 1964 erwarb ich das Vordiplom und im Herbst 1967 das Diplom in Mathematik mit den Nebenfächern Theoretische Physik und Experimentalphysik. Seit 1968 bin ich als Assistent am hiesigen Mathematischen Institut tätig.

Im Verlaufe meines Studiums besuchte ich Vorlesungen, Uebungen und Seminarien bei den folgenden Professoren und Dozenten : K. Alder, F. Blumer, R. Conzelmann, M. Eichler, H. Erlenmeyer, W. Habicht, H. Huber, P. Huber, H. Kappus, E. Miescher, H.J. Salmony, P. Scherrer und H.R. Striebel.

Herrn Professor H. Huber, unter dessen Anleitung die vorliegende Arbeit entstanden ist, danke ich für seine Betreuung auf dem Wege zur Promotion.

